Un modelo cinético para la dinámica de evacuación de multitudes con contagio de enfermedades infecciosas

J.P. Agnelli – B. Buffa – D.A. Knopoff – G.A. Torres

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA)
Universidad Nacional del Nordeste
IMIT – CONICET

UNNE
Universidad Nacional del Nordeste

CONICET

Introducción

Introducción

- Durante la pandemia COVID-19 se desarrollaron o adaptaron diversos modelos matemáticos.

Introducción

- Durante la pandemia COVID-19 se desarrollaron o adaptaron diversos modelos matemáticos.
- Estos modelos epidemiológicos fueron de utilidad para desarrollar estrategias de control.

Introducción

- Durante la pandemia COVID-19 se desarrollaron o adaptaron diversos modelos matemáticos.
- Estos modelos epidemiológicos fueron de utilidad para desarrollar estrategias de control.
- Tales medidas pueden aplicarse para cualquier enfermedad similar:

Introducción

- Durante la pandemia COVID-19 se desarrollaron o adaptaron diversos modelos matemáticos.
- Estos modelos epidemiológicos fueron de utilidad para desarrollar estrategias de control.
- Tales medidas pueden aplicarse para cualquier enfermedad similar:
  - Gripe aviar (H5N1).

Introducción

- Durante la pandemia COVID-19 se desarrollaron o adaptaron diversos modelos matemáticos.
- Estos modelos epidemiológicos fueron de utilidad para desarrollar estrategias de control.
- Tales medidas pueden aplicarse para cualquier enfermedad similar:
  - Gripe aviar (H5N1).
  - SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome).

Introducción

- Durante la pandemia COVID-19 se desarrollaron o adaptaron diversos modelos matemáticos.
- Estos modelos epidemiológicos fueron de utilidad para desarrollar estrategias de control.
- Tales medidas pueden aplicarse para cualquier enfermedad similar:
  - Gripe aviar (H5N1).
  - SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome).
  - Gripe H1N1, ...

Introducción

Introducción

- Muchos modelos epidemiológicos están basados en promedios del comportamiento sobre una gran cantidad de individuos en un período de tiempo.

Introducción

- Muchos modelos epidemiológicos están basados en promedios del comportamiento sobre una gran cantidad de individuos en un período de tiempo.
- Estos modelos incluyen parámetros complejos [Brauer y col., 2019], y no son válidos para poblaciones de tamaño medio o pequeñas [Aguiar y col., 2021].

Introducción

- Muchos modelos epidemiológicos están basados en promedios del comportamiento sobre una gran cantidad de individuos en un período de tiempo.
- Estos modelos incluyen parámetros complejos [Brauer y col., 2019], y no son válidos para poblaciones de tamaño medio o pequeñas [Aguiar y col., 2021].
- Presentamos un modelo tipo SEIRV (Susceptible - Exposed - Infectious - Recovered - Vaccinated) para modelar la propagación de una enfermedad en una situación general.

Introducción

Introducción

- Modelos de dinámica de multitudes y modelos epidemiológicos han sido tratados por separado, aunque han habido algunos intentos de combinarlos.

Introducción

- Modelos de dinámica de multitudes y modelos epidemiológicos han sido tratados por separado, aunque han habido algunos intentos de combinarlos.
- En [Kim y Quaini, 2020] se usa con situaciones de pánico.

Introducción

- Modelos de dinámica de multitudes y modelos epidemiológicos han sido tratados por separado, aunque han habido algunos intentos de combinarlos.
- En [Kim y Quaini, 2020] se usa con situaciones de pánico.
- En [Terna y col., 2020] se usa un modelo basado en agentes.

Introducción

Introducción

- Nuestro punto de partida es un modelo de dinámica de multitudes desarrollado en [Agnelli y col., 2015].

Introducción

- Nuestro punto de partida es un modelo de dinámica de multitudes desarrollado en [Agnelli y col., 2015].
- El modelo consiste en simular la evacuación de un grupo de individuos de un recinto acotado con puertas.

Introducción

- Nuestro punto de partida es un modelo de dinámica de multitudes desarrollado en [Agnelli y col., 2015].
- El modelo consiste en simular la evacuación de un grupo de individuos de un recinto acotado con puertas.
- Cada peatón es portador de una variable microscópica que describe su estado en relación a una enfermedad.

Introducción

- Nuestro punto de partida es un modelo de dinámica de multitudes desarrollado en [Agnelli y col., 2015].
- El modelo consiste en simular la evacuación de un grupo de individuos de un recinto acotado con puertas.
- Cada peatón es portador de una variable microscópica que describe su estado en relación a una enfermedad.
- Tenemos entonces un modelo mixto.

Subsistemas funcionales y representación

Subsistemas funcionales y representación

- Se dispone de un dominio Ω que en su frontera tiene zonas de salida $E \subset \partial\Omega$.

Subsistemas funcionales y representación

- Se dispone de un dominio Ω que en su frontera tiene zonas de salida $E \subset \partial\Omega$.

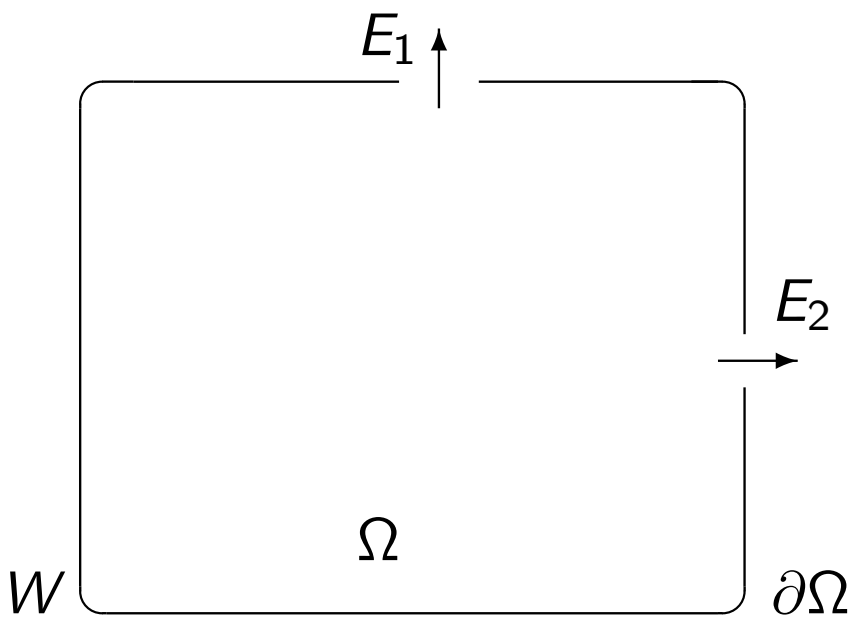


Figura: Geometría del dominio Ω con frontera $\partial\Omega = W \cup E_1 \cup E_2$.

Subsistemas funcionales y representación

Subsistemas funcionales y representación

- El dominio está caracterizado por un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, donde α se refiere a la calidad del suelo.

Subsistemas funcionales y representación

- El dominio está caracterizado por un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, donde α se refiere a la calidad del suelo.
- Cada partícula (individuo) está caracterizada por su:

Subsistemas funcionales y representación

- El dominio está caracterizado por un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, donde α se refiere a la calidad del suelo.
- Cada partícula (individuo) está caracterizada por su:
  - posición $\mathrm{x} = (x, y)$.

Subsistemas funcionales y representación

- El dominio está caracterizado por un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, donde α se refiere a la calidad del suelo.
- Cada partícula (individuo) está caracterizada por su:
  - posición $\mathrm{x} = (x, y)$.
  - velocidad $\mathrm{v} = v\,(\cos\theta, \sin\theta)$.

Subsistemas funcionales y representación

- El dominio está caracterizado por un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, donde α se refiere a la calidad del suelo.
- Cada partícula (individuo) está caracterizada por su:
  - posición $\mathrm{x} = (x, y)$.
  - velocidad $\mathrm{v} = v\,(\cos\theta, \sin\theta)$.
  - v será una cantidad determinística y

$$I_\theta = \left\{ \theta_i = \frac{i-1}{n} 2\pi : i = 1, \ldots, N_\theta \right\}.$$

Subsistemas funcionales y representación

- El dominio está caracterizado por un parámetro $\alpha \in [0,1]$, donde α se refiere a la calidad del suelo.
- Cada partícula (individuo) está caracterizada por su:
  - posición $\mathrm{x} = (x, y)$.
  - velocidad $\mathrm{v} = v\,(\cos\theta, \sin\theta)$.
  - v será una cantidad determinística y

$$I_\theta = \left\{ \theta_i = \frac{i-1}{n} 2\pi : i = 1, \ldots, N_\theta \right\}.$$

  - una variable relacionada a la enfermedad, en un conjunto I_λ de cardinal N_λ. Por ejemplo $I_\lambda = \{S, E, I, R, V\}$.

Subsistemas funcionales y representación

Subsistemas funcionales y representación

- El estado de las partículas está definido por una función de distribución:
$$f_i^j(t, \mathrm{x}) = f(t, \mathrm{x}, \theta_i, \lambda_j).$$
que representa la cantidad de partículas en el tiempo t, posición x, que se mueven con dirección θ_i y tienen un estado de salud λ_j.

Subsistemas funcionales y representación

Subsistemas funcionales y representación

- Se pueden calcular varias cantidades macroscópicas:

Subsistemas funcionales y representación

- Se pueden calcular varias cantidades macroscópicas:
  - Densidad local:

$$\rho\left(t,\mathrm{x}\right)=\sum_{j\in I_\lambda}\sum_{i=1}^{N_\theta}f_i^j\left(t,\mathrm{x}\right).$$

Subsistemas funcionales y representación

- Se pueden calcular varias cantidades macroscópicas:
  - Densidad local:

$$\rho\left(t,\mathrm{x}\right)=\sum_{j\in I_\lambda}\sum_{i=1}^{N_\theta}f_i^j\left(t,\mathrm{x}\right).$$

  - Población total:

$$N\left(t\right)=\int_\Omega\rho\left(t,\mathrm{x}^*\right)d\mathrm{x}^*.$$

Subsistemas funcionales y representación

- Se pueden calcular varias cantidades macroscópicas:
  - Densidad local:

$$\rho\left(t,\mathrm{x}\right)=\sum_{j\in I_\lambda}\sum_{i=1}^{N_\theta}f_i^j\left(t,\mathrm{x}\right).$$

  - Población total:

$$N\left(t\right)=\int_\Omega\rho\left(t,\mathrm{x}^*\right)d\mathrm{x}^*.$$

  - Población de susceptibles:

$$S\left(t\right)=\int_\Omega\rho^S\left(t,\mathrm{x}^*\right)d\mathrm{x}^*\ldots$$

Estructura matemática

Estructura matemática

- Haciendo un balance de partículas en un elemento de volumen en el espacio de los estados se tiene:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}).$$

donde

Estructura matemática

- Haciendo un balance de partículas en un elemento de volumen en el espacio de los estados se tiene:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}).$$

donde

- $j \in I_\lambda, \quad i = 1, \ldots, N_\theta.$

Estructura matemática

- Haciendo un balance de partículas en un elemento de volumen en el espacio de los estados se tiene:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}).$$

donde

- $j \in I_\lambda, \quad i = 1,\ldots,N_\theta.$
- $\mathrm{v}_i[\rho] = v[\rho](\cos\theta_i, \sin\theta_i).$

Estructura matemática

- Haciendo un balance de partículas en un elemento de volumen en el espacio de los estados se tiene:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}).$$

donde

- $j \in I_\lambda, \quad i = 1,\ldots,N_\theta.$
- $\mathrm{v}_i[\rho] = v[\rho](\cos\theta_i, \sin\theta_i).$
- El lado izquierdo modela el transporte de las partículas.

Estructura matemática

- Haciendo un balance de partículas en un elemento de volumen en el espacio de los estados se tiene:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}).$$

donde

- $j \in I_\lambda, \quad i = 1,\ldots,N_\theta.$
- $\mathrm{v}_i[\rho] = v[\rho](\cos\theta_i, \sin\theta_i).$
- El lado izquierdo modela el transporte de las partículas.
- El lado derecho modela el balance de las partículas que tienen estado de salud λ_j y dirección θ_i debido a interacciones.

Estructura matemática

Para modelar la forma en la que los peatones interactúan se asume que:

Estructura matemática

Para modelar la forma en la que los peatones interactúan se asume que:

- caminan hacia la salida.

Estructura matemática

Para modelar la forma en la que los peatones interactúan se asume que:

- caminan hacia la salida.
- evitan colisionar con las paredes.

Estructura matemática

Para modelar la forma en la que los peatones interactúan se asume que:

- caminan hacia la salida.
- evitan colisionar con las paredes.
- se mueven hacia zonas menos congestionadas.

Estructura matemática

Para modelar la forma en la que los peatones interactúan se asume que:

- caminan hacia la salida.
- evitan colisionar con las paredes.
- se mueven hacia zonas menos congestionadas.
- sienten atracción a seguir la corriente.

Estructura matemática

Para modelar la forma en la que los peatones interactúan se asume que:

- caminan hacia la salida.
- evitan colisionar con las paredes.
- se mueven hacia zonas menos congestionadas.
- sienten atracción a seguir la corriente.
- la interacción entre susceptibles e infecciosos puede producir contagio y propagación de la enfermedad.

Estructura matemática

Estructura matemática

Las primeras dos hipótesis hacen referencia a cuestiones geométricas, y el resto tiene que ver con las interacciones entre los peatones, por lo que

Estructura matemática

Las primeras dos hipótesis hacen referencia a cuestiones geométricas, y el resto tiene que ver con las interacciones entre los peatones, por lo que

$$\mathcal{J}_i^j[f] = \mathcal{J}_i^G[f] + \mathcal{J}_i^{jP}[f].$$

Estructura matemática

Estructura matemática

- Los cambios de dirección se realizan por reglas de transición:

Estructura matemática

- Los cambios de dirección se realizan por reglas de transición:
  - $\mathcal{A}_h(i)$: probabilidad de que un peatón con dirección θ_h adquiera la dirección θ_i debido a una interacción con las paredes o las salidas.

Estructura matemática

- Los cambios de dirección se realizan por reglas de transición:
  - $\mathcal{A}_h(i)$: probabilidad de que un peatón con dirección θ_h adquiera la dirección θ_i debido a una interacción con las paredes o las salidas.
  - $\mathcal{B}^1_{hk}(i)$ es la probabilidad que un individuo con dirección θ_h cambie su dirección a θ_i luego de una interacción con otro peatón que camina con dirección θ_k.

Estructura matemática

- Los cambios de dirección se realizan por reglas de transición:
  - $\mathcal{A}_h(i)$: probabilidad de que un peatón con dirección θ_h adquiera la dirección θ_i debido a una interacción con las paredes o las salidas.
  - $\mathcal{B}^1_{hk}(i)$ es la probabilidad que un individuo con dirección θ_h cambie su dirección a θ_i luego de una interacción con otro peatón que camina con dirección θ_k.
  - $\mathcal{B}^2_{sr}(j)$ es la probabilidad que un individuo con estado de salud λ_s cambie su estado a λ_j luego de una interacción con otro peatón que tiene estado de salud λ_r.

Estructura matemática

- Los cambios de dirección se realizan por reglas de transición:
  - $\mathcal{A}_h(i)$: probabilidad de que un peatón con dirección θ_h adquiera la dirección θ_i debido a una interacción con las paredes o las salidas.
  - $\mathcal{B}^1_{hk}(i)$ es la probabilidad que un individuo con dirección θ_h cambie su dirección a θ_i luego de una interacción con otro peatón que camina con dirección θ_k.
  - $\mathcal{B}^2_{sr}(j)$ es la probabilidad que un individuo con estado de salud λ_s cambie su estado a λ_j luego de una interacción con otro peatón que tiene estado de salud λ_r.
- Proponemos combinar los efectos en el cambio de dirección y salud debido a interacción con peatones de la siguiente manera:

Estructura matemática

- Los cambios de dirección se realizan por reglas de transición:
  - $\mathcal{A}_h(i)$: probabilidad de que un peatón con dirección θ_h adquiera la dirección θ_i debido a una interacción con las paredes o las salidas.
  - $\mathcal{B}^1_{hk}(i)$ es la probabilidad que un individuo con dirección θ_h cambie su dirección a θ_i luego de una interacción con otro peatón que camina con dirección θ_k.
  - $\mathcal{B}^2_{sr}(j)$ es la probabilidad que un individuo con estado de salud λ_s cambie su estado a λ_j luego de una interacción con otro peatón que tiene estado de salud λ_r.
- Proponemos combinar los efectos en el cambio de dirección y salud debido a interacción con peatones de la siguiente manera:

$$\mathcal{B}^{sr}_{hk}(i,j)[\rho] = \mathcal{B}^1_{hk}(i)[\rho] \times \mathcal{B}^2_{sr}(j).$$

Estructura matemática

Estructura matemática

Las ecuaciones completas serían:

$$\underbrace{\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right)}_{\text{transporte}} = \underbrace{\mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x})}_{\text{interacciones}}$$

$$= \mu[\rho(t,\mathrm{x})]\left(\sum_{h=1}^{N_\theta} \mathcal{A}_h(i)\, f_h^j(t,\mathrm{x}) - f_i^j(t,\mathrm{x})\right)$$

$$+ \eta[\rho(t,\mathrm{x})]\left(\sum_{s,r=1}^{N_\lambda}\sum_{h,k=1}^{N_\theta} \mathcal{B}_{hk}^{sr}(i,j)[\rho]\, f_h^s(t,\mathrm{x})\, f_k^r(t,\mathrm{x}) - f_i^j(t,\mathrm{x})\,\rho(t,\mathrm{x})\right)$$

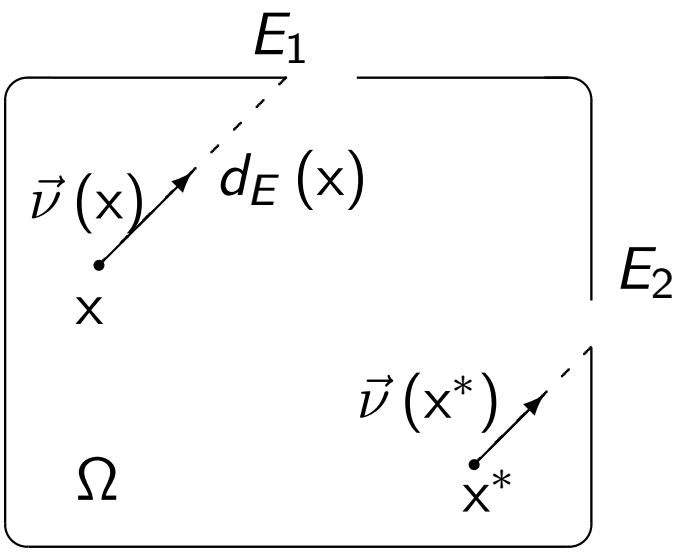
Tendencia a moverse hacia la salida

Tendencia a moverse hacia la salida

- Los peatones podrían elegir el camino más corto hacia la salida más cercana.

Tendencia a moverse hacia la salida

- Los peatones podrían elegir el camino más corto hacia la salida más cercana.



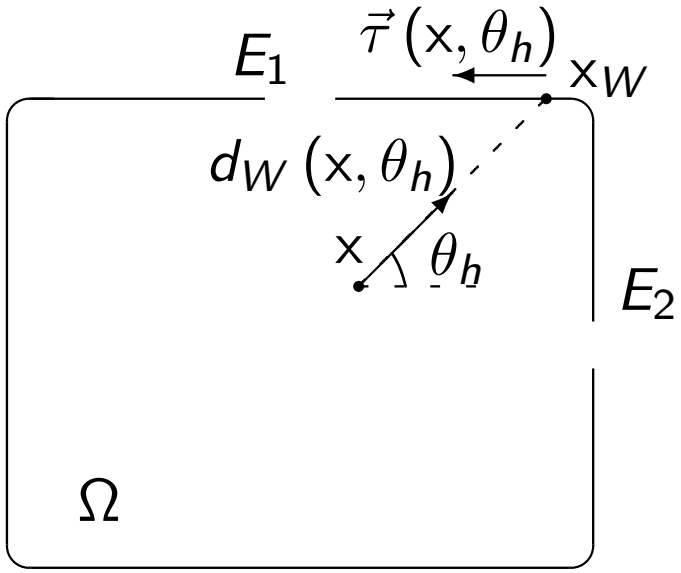
Tendencia a evitar colisión con las paredes

Tendencia a evitar colisión con las paredes

- Los peatones, de chocar con las paredes, irán bordeando la pared a la salida más cercana.

Tendencia a evitar colisión con las paredes

- Los peatones, de chocar con las paredes, irán bordeando la pared a la salida más cercana.



Tendencia a moverse a áreas menos congestionadas

Tendencia a moverse a áreas menos congestionadas

- Para facilitar su movimiento se define un vector $\vec{\gamma}(\theta_h, \rho)$, elegido como aquella dirección que da la mínima derivada direccional de la densidad en el punto x.

Tendencia a seguir la corriente

Tendencia a seguir la corriente

- Una partícula caminando en dirección θ_h podría encontrarse con otra que camina en la dirección θ_k y decidir seguirla. En ese caso se define el vector unitario: $\vec{\sigma}_k = (\cos\theta_k, \sin\theta_k)$.

Algunas hipótesis

Algunas hipótesis

(A1) La tendencia a la salida aumenta a medida que se acerca más a la puerta.

Algunas hipótesis

(A1) La tendencia a la salida aumenta a medida que se acerca más a la puerta.

(A2) Los peatones están sujetos a una influencia cada vez más fuerte para evitar las paredes a medida que se van acercando a ellas.

Algunas hipótesis

(A1) La tendencia a la salida aumenta a medida que se acerca más a la puerta.

(A2) Los peatones están sujetos a una influencia cada vez más fuerte para evitar las paredes a medida que se van acercando a ellas.

(A3) La tendencia a ir por áreas menos congestionadas depende de la densidad local.

Algunas hipótesis

(A1) La tendencia a la salida aumenta a medida que se acerca más a la puerta.

(A2) Los peatones están sujetos a una influencia cada vez más fuerte para evitar las paredes a medida que se van acercando a ellas.

(A3) La tendencia a ir por áreas menos congestionadas depende de la densidad local.

(A4) La tendencia a seguir la corriente depende de la densidad local.

Definiendo el conflicto entre algunas hipótesis

Definiendo el conflicto entre algunas hipótesis

- Las hipótesis (A3) y (A4) están conflicto.

Definiendo el conflicto entre algunas hipótesis

- Las hipótesis (A3) y (A4) están conflicto.
- Introducimos un parámetro $\varepsilon \in [0, 1]$ donde:

Definiendo el conflicto entre algunas hipótesis

- Las hipótesis (A3) y (A4) están conflicto.
- Introducimos un parámetro $\varepsilon \in [0, 1]$ donde:
  - $\varepsilon = 0$ corresponde a que el peatón decida elegir solamente las áreas menos congestionadas.

Definiendo el conflicto entre algunas hipótesis

- Las hipótesis (A3) y (A4) están conflicto.
- Introducimos un parámetro $\varepsilon \in [0, 1]$ donde:
  - $\varepsilon = 0$ corresponde a que el peatón decida elegir solamente las áreas menos congestionadas.
  - $\varepsilon = 1$ corresponde a que el peatón decida elegir a la corriente.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con las paredes decrecerá con la densidad local $\mu[\rho] \sim 1 - \rho$.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con las paredes decrecerá con la densidad local $\mu[\rho] \sim 1 - \rho$.
- La probabilidad de transición $\mathcal{A}_h(i)$ es la probabilidad que una h-partícula ajuste su dirección a θ_i inducida por la presencia de las paredes y puertas de salidas.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con las paredes decrecerá con la densidad local $\mu[\rho] \sim 1 - \rho$.
- La probabilidad de transición $\mathcal{A}_h(i)$ es la probabilidad que una h-partícula ajuste su dirección a θ_i inducida por la presencia de las paredes y puertas de salidas.
- Los cambios de dirección son suaves.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con las paredes decrecerá con la densidad local $\mu[\rho] \sim 1 - \rho$.
- La probabilidad de transición $\mathcal{A}_h(i)$ es la probabilidad que una h-partícula ajuste su dirección a θ_i inducida por la presencia de las paredes y puertas de salidas.
- Los cambios de dirección son suaves.
- $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_h(i)\}_{h,i=1,\ldots N_\theta}$ es la tabla de juegos que tiene que ver con la geometría del dominio.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con otro dependerá de la densidad, por ejemplo, $\eta[\rho] = \eta_0 \rho$.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con otro dependerá de la densidad, por ejemplo, $\eta[\rho] = \eta_0 \rho$.
- La probabilidad de transición $\mathcal{B}^1_{hk}(i)[\rho]$ es la probabilidad que un peatón que camina en dirección θ_h decida cambiar su dirección a la dirección θ_i luego de que se encuentre con otro peatón que camina en dirección k.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con otro dependerá de la densidad, por ejemplo, $\eta[\rho] = \eta_0 \rho$.
- La probabilidad de transición $\mathcal{B}^1_{hk}(i)[\rho]$ es la probabilidad que un peatón que camina en dirección θ_h decida cambiar su dirección a la dirección θ_i luego de que se encuentre con otro peatón que camina en dirección k.
- Esta decisión dependerá de la búsqueda por zonas menos congestionadas y la tendencia a seguir la corriente.

Términos de interacción y elección de la dirección deseada

- La tasa de "interacción" de un peatón con otro dependerá de la densidad, por ejemplo, $\eta[\rho] = \eta_0 \rho$.
- La probabilidad de transición $\mathcal{B}^1_{hk}(i)[\rho]$ es la probabilidad que un peatón que camina en dirección θ_h decida cambiar su dirección a la dirección θ_i luego de que se encuentre con otro peatón que camina en dirección k.
- Esta decisión dependerá de la búsqueda por zonas menos congestionadas y la tendencia a seguir la corriente.
- Los cambios de dirección son suaves.

Modelando la dinámica del contagio

Modelando la dinámica del contagio

- Cada individuo tiene asociado un estado de acuerdo a su condición relacionada a la enfermedad.

Modelando la dinámica del contagio

- Cada individuo tiene asociado un estado de acuerdo a su condición relacionada a la enfermedad.
- Consideremos el caso más simple $I_\lambda = \{S, E, I, R\}$: Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered.

Modelando la dinámica del contagio

- Cada individuo tiene asociado un estado de acuerdo a su condición relacionada a la enfermedad.
- Consideremos el caso más simple $I_\lambda = \{S, E, I, R\}$: Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered.
- Tenemos que tener en cuenta que el tiempo de evacuación es de algunos minutos, mientras que el tiempo de infección o de contagiar es del orden de días.

Modelando la dinámica del contagio

- Cada individuo tiene asociado un estado de acuerdo a su condición relacionada a la enfermedad.
- Consideremos el caso más simple $I_\lambda = \{S, E, I, R\}$: Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered.
- Tenemos que tener en cuenta que el tiempo de evacuación es de algunos minutos, mientras que el tiempo de infección o de contagiar es del orden de días.
- Cuando una partícula S se encuentra con una particula I podría volverse una partícula I *después* del tiempo de evacuación.

Modelando la dinámica del contagio

- Cada individuo tiene asociado un estado de acuerdo a su condición relacionada a la enfermedad.
- Consideremos el caso más simple $I_\lambda = \{S, E, I, R\}$: Susceptible, Exposed, Infectious, Recovered.
- Tenemos que tener en cuenta que el tiempo de evacuación es de algunos minutos, mientras que el tiempo de infección o de contagiar es del orden de días.
- Cuando una partícula S se encuentra con una particula I podría volverse una partícula I *después* del tiempo de evacuación.
- Nosotros estamos interesados en la dinámica *durante* la evacuación.

Modelando la dinámica del contagio

Modelando la dinámica del contagio

La dinámica del modelo SEIR se puede describir a través de una reacción química:

$$
\begin{aligned}
S + I &\xrightarrow{i_{r_S}} E + I \\
E &\xrightarrow{p_{EI}} I \\
I &\xrightarrow{p_{IR}} R,
\end{aligned}
$$

Modelando la dinámica del contagio

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo la primera ecuación.

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo la primera ecuación.
- Las únicas entradas no triviales de la tabla de juegos serán:

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo la primera ecuación.
- Las únicas entradas no triviales de la tabla de juegos serán:
  - $\mathcal{B}^2_{SI}(E) = i_{r_S}$.

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo la primera ecuación.
- Las únicas entradas no triviales de la tabla de juegos serán:
  - $\mathcal{B}^2_{SI}(E) = i_{r_S}$.
  - $\mathcal{B}^2_{SI}(S) = 1 - i_{r_S}$.

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

- Susceptible + Susceptible $\rightarrow$ Susceptible.

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

- Susceptible + Susceptible $\rightarrow$ Susceptible.
- Susceptible + Infectious $\rightarrow$ Exposed con probabilidad i_{r_S}.

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

- Susceptible + Susceptible $\rightarrow$ Susceptible.
- Susceptible + Infectious $\rightarrow$ Exposed con probabilidad i_{r_S}.
- Susceptible + Exposed $\rightarrow$ Susceptible.

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

- Susceptible + Susceptible $\rightarrow$ Susceptible.
- Susceptible + Infectious $\rightarrow$ Exposed con probabilidad i_{r_S}.
- Susceptible + Exposed $\rightarrow$ Susceptible.
- Infectious + Something $\rightarrow$ Infectious.

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

- Susceptible + Susceptible $\rightarrow$ Susceptible.
- Susceptible + Infectious $\rightarrow$ Exposed con probabilidad i_{r_S}.
- Susceptible + Exposed $\rightarrow$ Susceptible.
- Infectious + Something $\rightarrow$ Infectious.
- Exposed + Something $\rightarrow$ Exposed.

Modelando la dinámica del contagio

Veamos algunos ejemplos para comprender la dinámica:

- Susceptible + Susceptible $\rightarrow$ Susceptible.
- Susceptible + Infectious $\rightarrow$ Exposed con probabilidad i_{r_S}.
- Susceptible + Exposed $\rightarrow$ Susceptible.
- Infectious + Something $\rightarrow$ Infectious.
- Exposed + Something $\rightarrow$ Exposed.
- ...

Modelando la dinámica del contagio

Modelando la dinámica del contagio

- Podemos incluir una clase de vacunados (V), que son parte de la clase de los S.

Modelando la dinámica del contagio

- Podemos incluir una clase de vacunados (V), que son parte de la clase de los S.
- Los individuos vacunados pueden infectarse con una probabilidad $i_{r_V} \leq i_{r_S}$.

Modelando la dinámica del contagio

- Podemos incluir una clase de vacunados (V), que son parte de la clase de los S.
- Los individuos vacunados pueden infectarse con una probabilidad $i_{r_V} \leq i_{r_S}$.
- Para el caso de una vacuna con perfecta efectividad, tendríamos que $i_{r_V} = 0$.

Modelando la dinámica del contagio

- Podemos incluir una clase de vacunados (V), que son parte de la clase de los S.
- Los individuos vacunados pueden infectarse con una probabilidad $i_{r_V} \leq i_{r_S}$.
- Para el caso de una vacuna con perfecta efectividad, tendríamos que $i_{r_V} = 0$.
- La clase de los vacunados podrían interpretarse como un conjunto de personas que se cuidan mejor que otras (por ejemplo, usando barbijos).

Modelando la dinámica del contagio

Modelando la dinámica del contagio

La dinámica del modelo SEIRV se puede describir a través de una reacción química:

$$
\begin{aligned}
S + I &\xrightarrow{i_{r_S}} E + I \\
V + I &\xrightarrow{i_{r_V}} E + I \\
E &\xrightarrow{p_{EI}} I \\
I &\xrightarrow{p_{IR}} R,
\end{aligned}
$$

Modelando la dinámica del contagio

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo las primeras dos ecuaciones.

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo las primeras dos ecuaciones.
- Las únicas entradas no triviales de la tabla de juegos serán las anteriores y las que se muestran a continuación:

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo las primeras dos ecuaciones.
- Las únicas entradas no triviales de la tabla de juegos serán las anteriores y las que se muestran a continuación:
  - $\mathcal{B}^2_{VI}(E) = i_{rV}$.

Modelando la dinámica del contagio

- Como estamos interesados en la dinámica durante el tiempo de evacuación, nuestra tabla de juegos considerará sólo las primeras dos ecuaciones.
- Las únicas entradas no triviales de la tabla de juegos serán las anteriores y las que se muestran a continuación:
  - $\mathcal{B}^2_{VI}(E) = i_{r_V}$.
  - $\mathcal{B}^2_{VI}(V) = 1 - i_{r_V}$.

Modelando el módulo de la velocidad

Modelando el módulo de la velocidad

- Se asume que la gente ajusta su velocidad de acuerdo al nivel de congestión que hay a su alrededor.

Modelando el módulo de la velocidad

- Se asume que la gente ajusta su velocidad de acuerdo al nivel de congestión que hay a su alrededor.
- Asumimos que $v = v(\alpha)$ depende linealmente de la calidad del terreno.

Modelando el módulo de la velocidad

- Se asume que la gente ajusta su velocidad de acuerdo al nivel de congestión que hay a su alrededor.
- Asumimos que $v = v(\alpha)$ depende linealmente de la calidad del terreno.
- $v(0) = 0$ significa que el terreno es tan problemático que no se pueden desplazar.

Modelando el módulo de la velocidad

- Se asume que la gente ajusta su velocidad de acuerdo al nivel de congestión que hay a su alrededor.
- Asumimos que $v = v(\alpha)$ depende linealmente de la calidad del terreno.
- $v(0) = 0$ significa que el terreno es tan problemático que no se pueden desplazar.
- $v(1) = 1$ significa que el terreno permite alcanzar la velocidad máxima del peatón sin problemas en el terreno.

Modelando el módulo de la velocidad

Modelando el módulo de la velocidad

- La máxima velocidad alcanzada para un terreno dado es $v(\alpha)$.

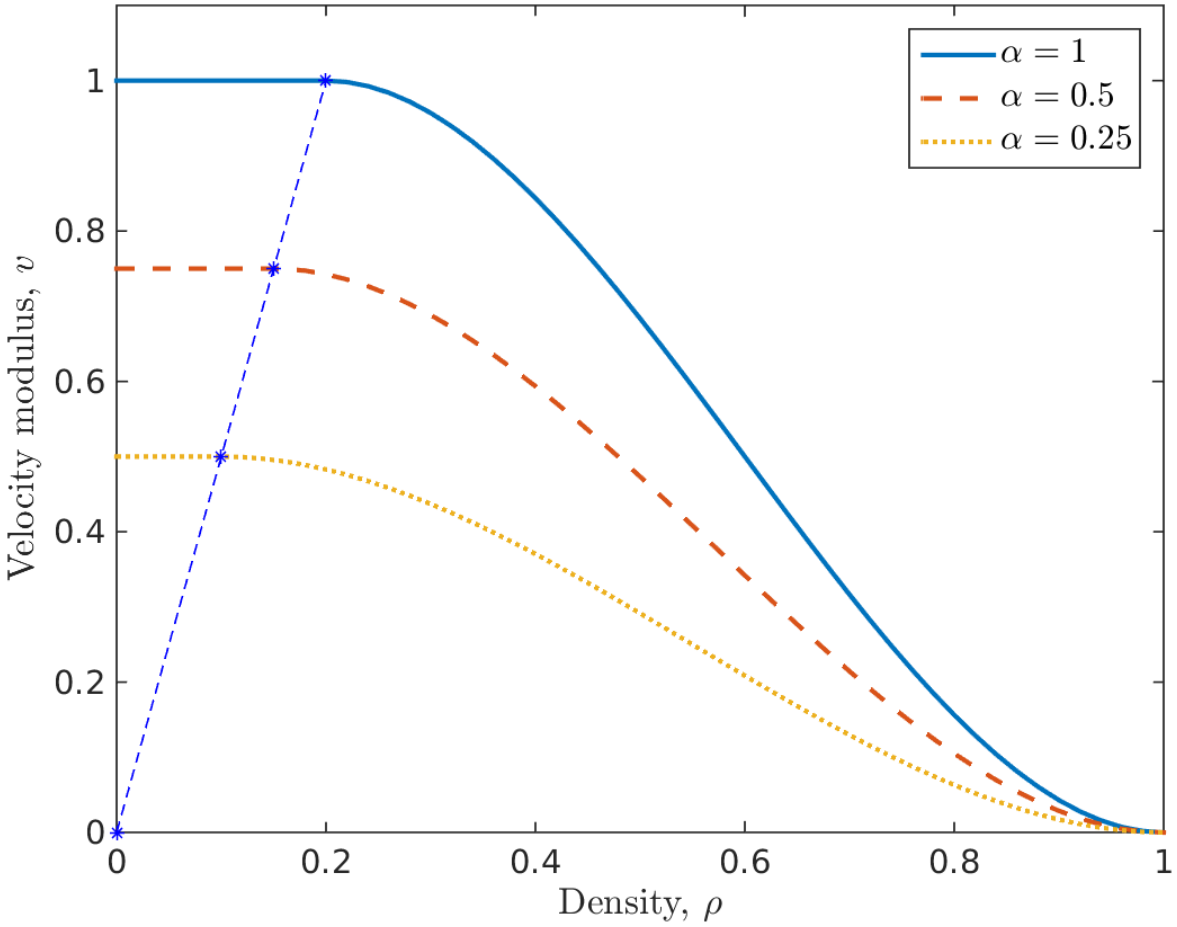
Modelando el módulo de la velocidad

- La máxima velocidad alcanzada para un terreno dado es $v(\alpha)$.
- Esta máxima velocidad se da cuando la densidad es menor o igual a una densidad crítica $\rho_c(\alpha)$.

Modelando el módulo de la velocidad

- La máxima velocidad alcanzada para un terreno dado es $v(\alpha)$.
- Esta máxima velocidad se da cuando la densidad es menor o igual a una densidad crítica $\rho_c(\alpha)$.
- Para valores de densidad mayores a la densidad crítica se entra en la zona de frenado, descripta por una función polinomial [Agnelli y col., 2015].

Modelando el módulo de la velocidad



Resolución numérica

Resolución numérica

- Para comenzar damos un conjunto de condiciones iniciales $f_i^j(0, \mathrm{x})$, for $i = 1, \ldots, N_\theta$ and $j \in I_\lambda = \{S, E, I, R, V\}$.

Resolución numérica

- Para comenzar damos un conjunto de condiciones iniciales $f_i^j(0, \mathrm{x})$, for $i = 1, \ldots, N_\theta$ and $j \in I_\lambda = \{S, E, I, R, V\}$.
- Las condiciones de contorno no están explicitadas pues el modelo hace que los peatones no choquen con las paredes.

Resolución numérica

Resolución numérica

- El modelo se resolverá en dos etapas utilizando el método splitting:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = 0,$$

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}),$$

para $j \in I_\lambda$, con $i = 1, \ldots, N_\theta$.

Resolución numérica

- El modelo se resolverá en dos etapas utilizando el método splitting:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = 0,$$

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}),$$

  para $j \in I_\lambda$, con $i = 1, \ldots, N_\theta$.
- La primera ecuación es una homogénea de transporte que se resuelve con un esquema de diferencias finitas conservativo [LeVeque, 2002; Piccoli y Tosin, 2011; Schäfer, 2006].

Resolución numérica

- El modelo se resolverá en dos etapas utilizando el método splitting:

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) + \mathrm{div}_{\mathrm{x}}\left(\mathrm{v}_i[\rho](t,\mathrm{x})\, f_i^j(t,\mathrm{x})\right) = 0,$$

$$\partial_t f_i^j(t,\mathrm{x}) = \mathcal{J}_i^j[f](t,\mathrm{x}),$$

  para $j \in I_\lambda$, con $i = 1, \ldots, N_\theta$.
- La primera ecuación es una homogénea de transporte que se resuelve con un esquema de diferencias finitas conservativo [LeVeque, 2002; Piccoli y Tosin, 2011; Schäfer, 2006].
- Para avanzar en el tiempo utilizamos el método de Euler.

Elección de algunos parámetros

Elección de algunos parámetros

- La habitación medirá 10 metros, con una salida de 2 metros.

Elección de algunos parámetros

- La habitación medirá 10 metros, con una salida de 2 metros.
- Se considerarán ocho direcciones posibles.

Elección de algunos parámetros

- La habitación medirá 10 metros, con una salida de 2 metros.
- Se considerarán ocho direcciones posibles.
- En la habitación hay 50 personas.

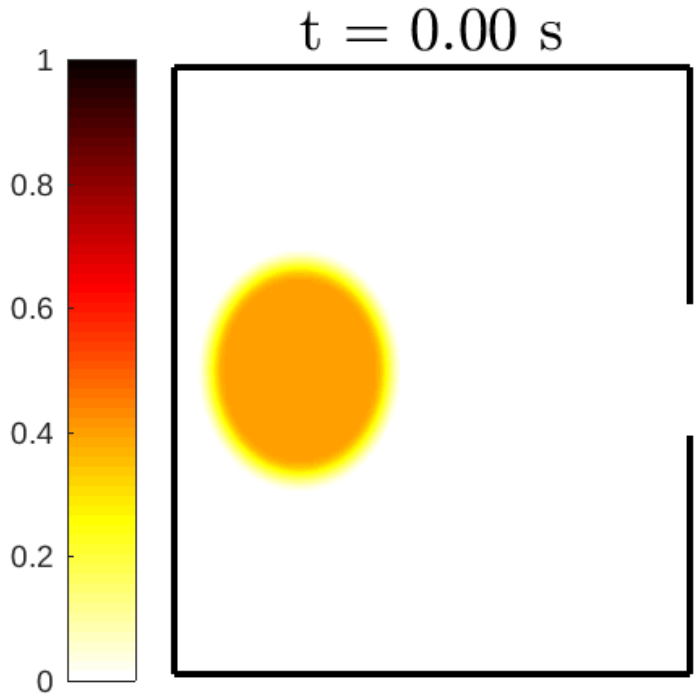
Elección de algunos parámetros

- La habitación medirá 10 metros, con una salida de 2 metros.
- Se considerarán ocho direcciones posibles.
- En la habitación hay 50 personas.
- Comenzamos con las siguientes proporciones: Susceptible: 60 %, Infectious: 25 %, Vaccinated: 15 %, Exposed: 0 %.

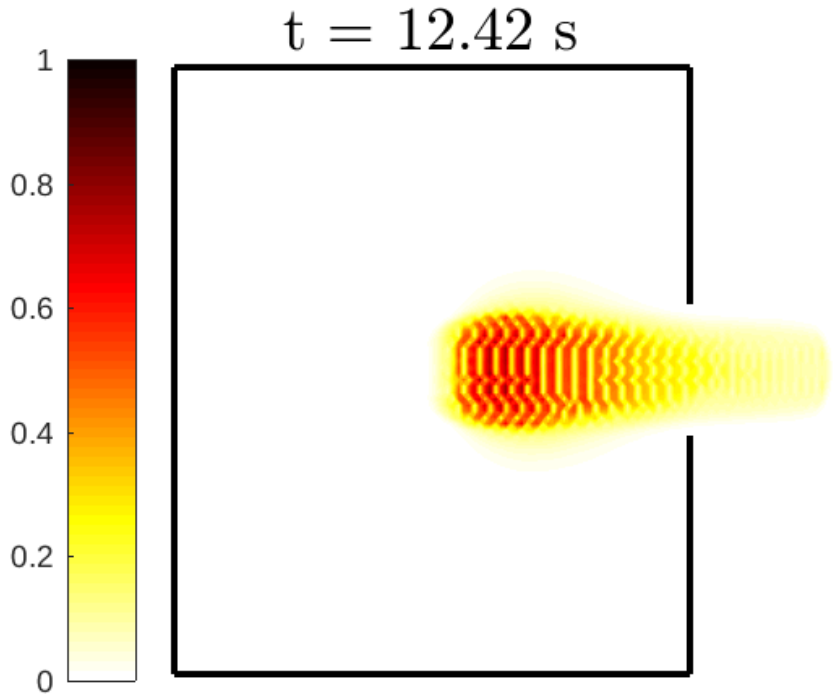
Elección de algunos parámetros

- La habitación medirá 10 metros, con una salida de 2 metros.
- Se considerarán ocho direcciones posibles.
- En la habitación hay 50 personas.
- Comenzamos con las siguientes proporciones: Susceptible: 60 %, Infectious: 25 %, Vaccinated: 15 %, Exposed: 0 %.
- Monitoreamos el estado de contagio en la habitación.

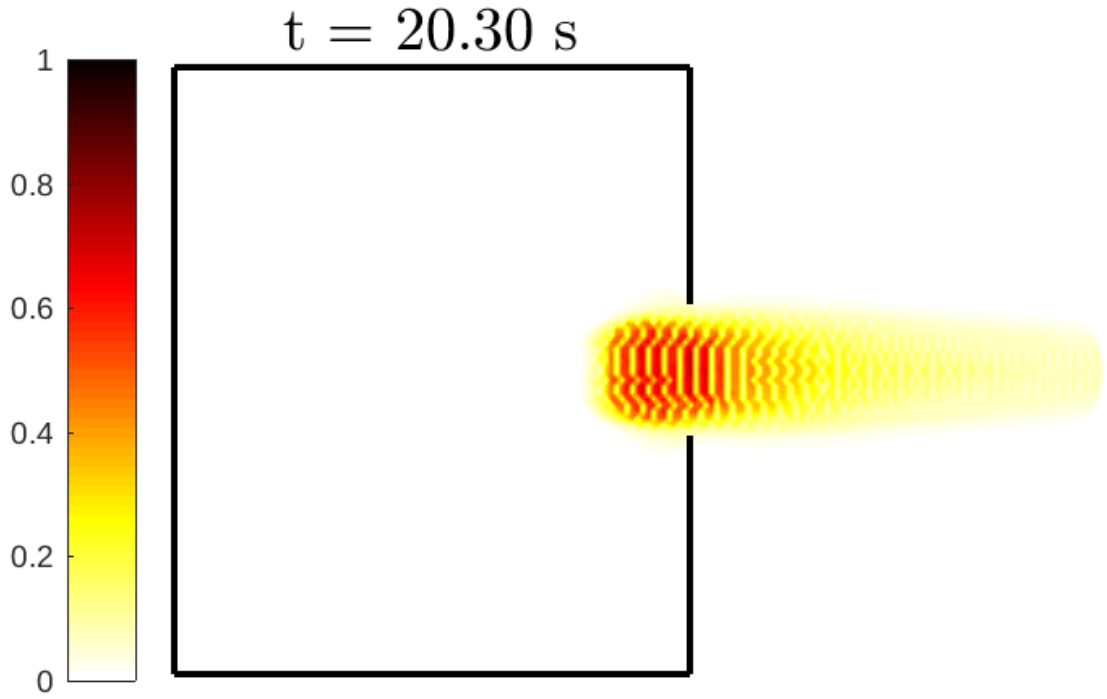
Evolución temporal



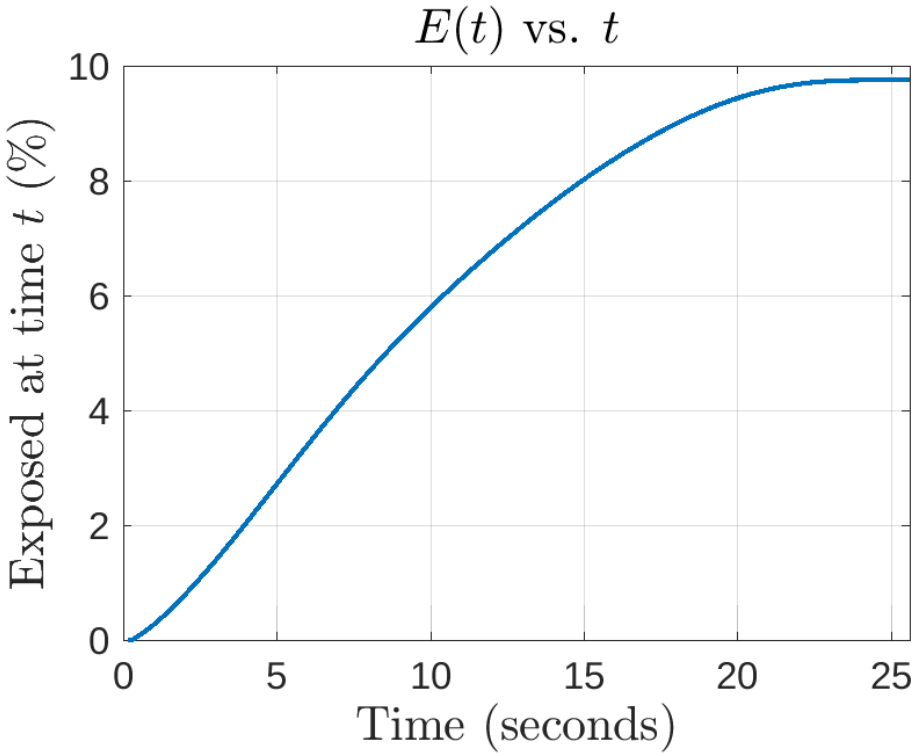
Evolución temporal



Evolución temporal



Evolución temporal



Tiempo de evacuación

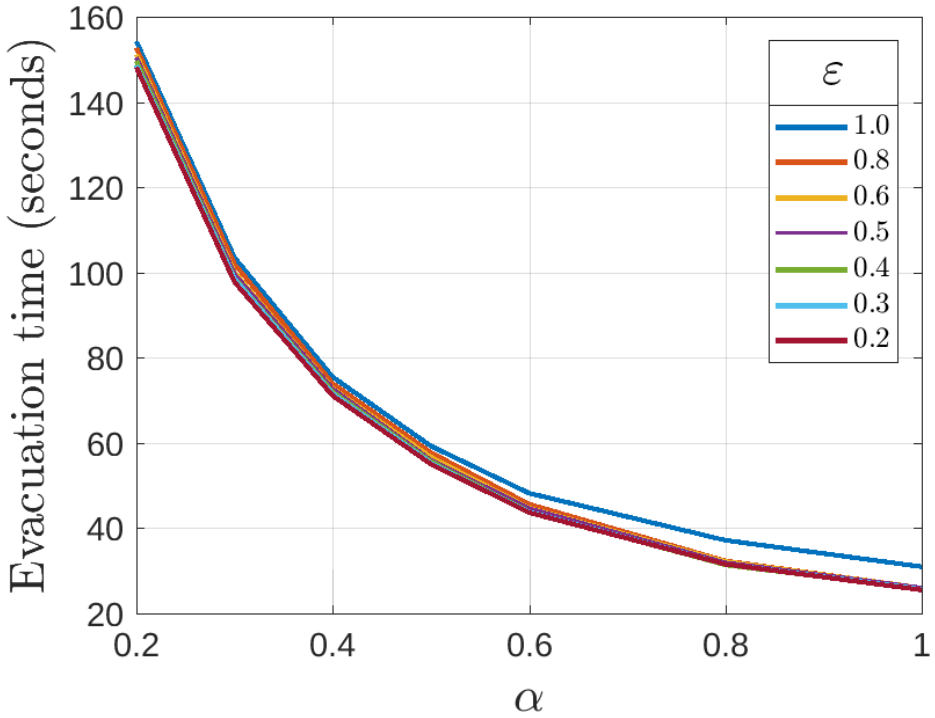


Figura: Tiempo de evacuación como función de α para diferentes valores de ε.

Tiempo de evacuación

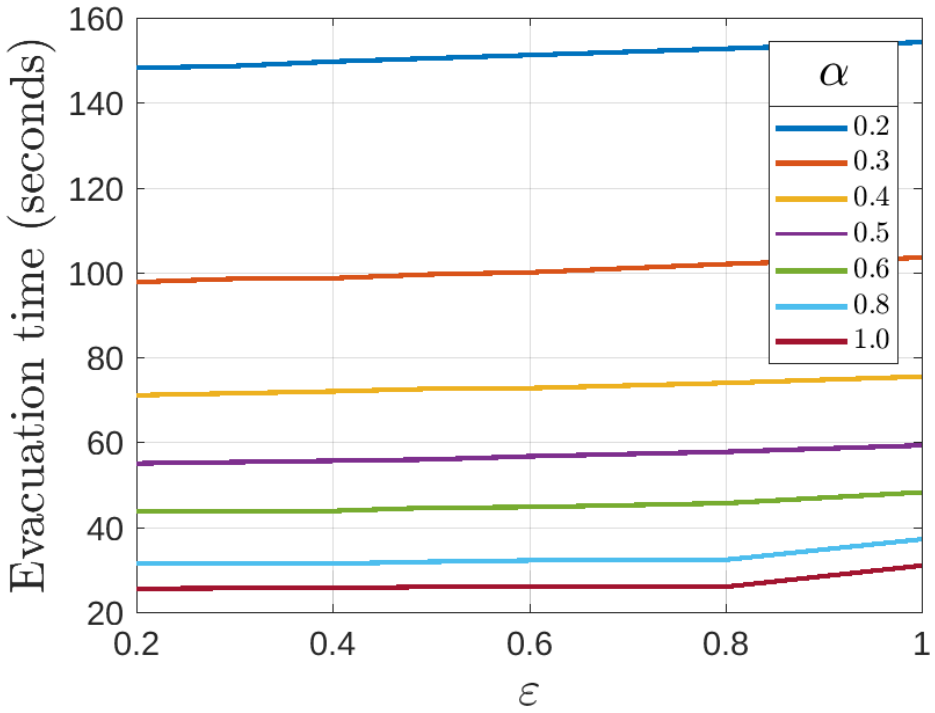


Figura: Tiempo de evacuación como función de ε para diferentes valores de α.

Proporción final de expuestos

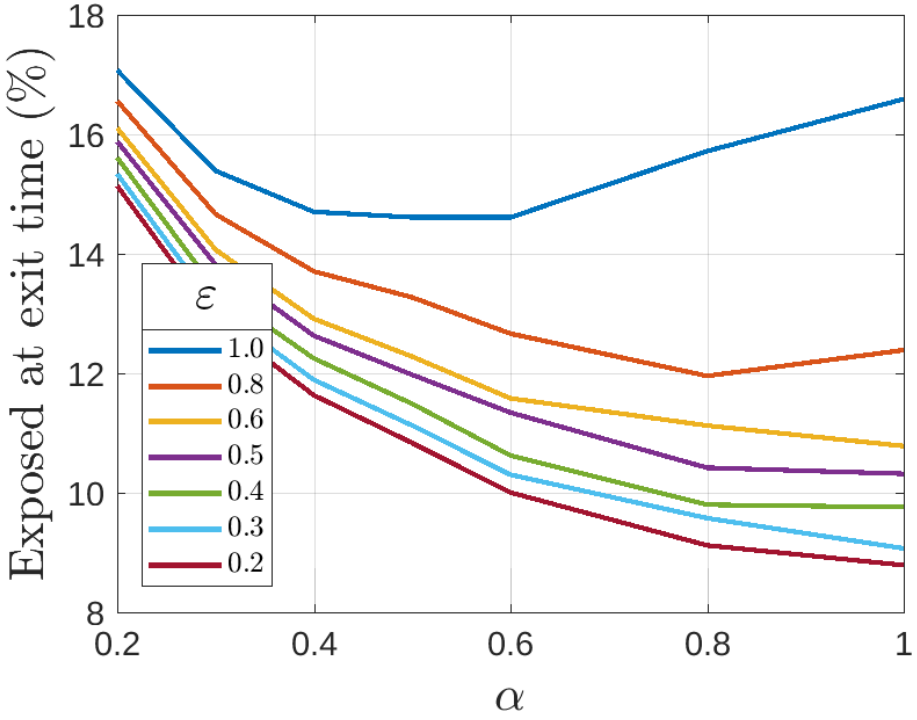


Figura: Proporción final de expuestos (cuando terminó la evacuación) como función de α para distintos valores de ε.

Proporción final de expuestos

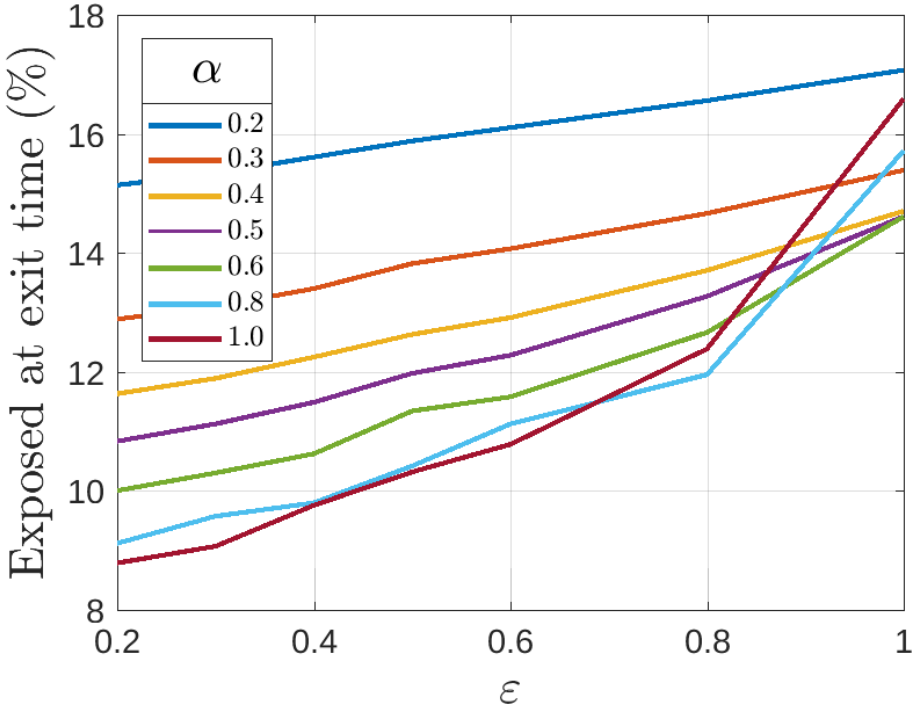


Figura: Proporción final de expuestos (cuando terminó la evacuación) como función de ε para distintos valores de α.

Proporción final de expuestos dependiendo de las tasas de contagio

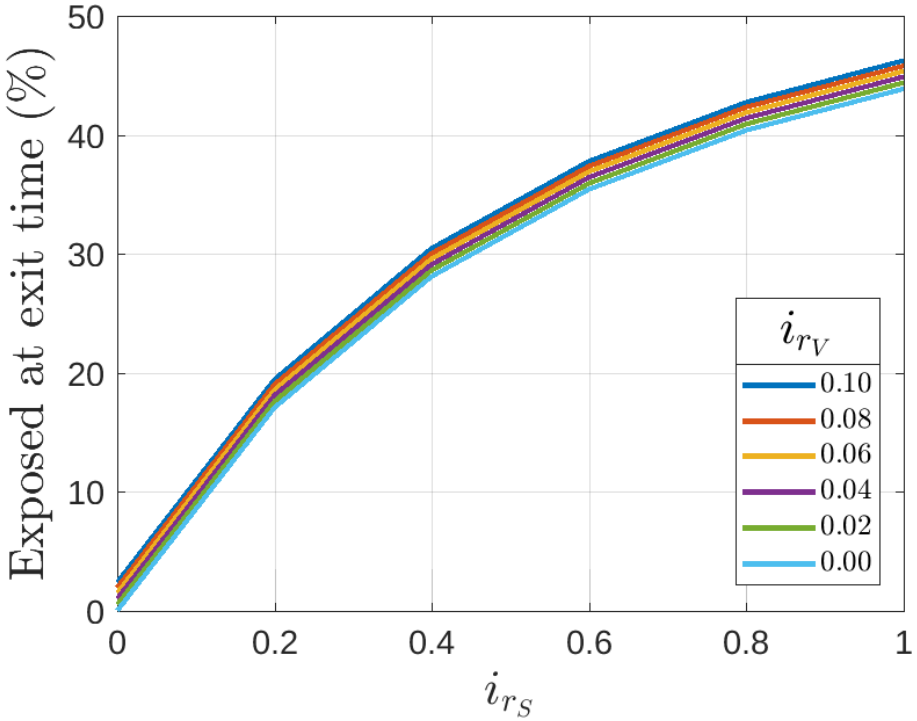


Figura: Proporción final de expuestos (cuando terminó la evacuación) como función de i_{r_S} para distintos valores de i_{r_V}.

Proporción final de expuestos dependiendo de las tasas de contagio

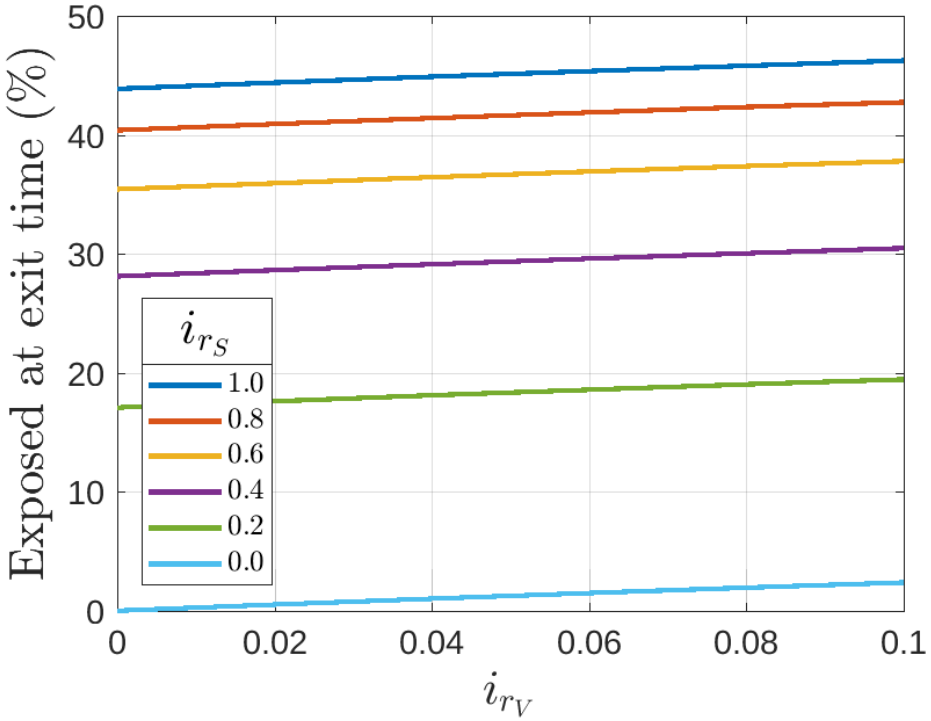


Figura: Proporción final de expuestos (cuando terminó la evacuación) como función de i_{r_V} para distintos valores de i_{r_S}.

Proporción final de expuestos dependiendo de las tasas de contagio

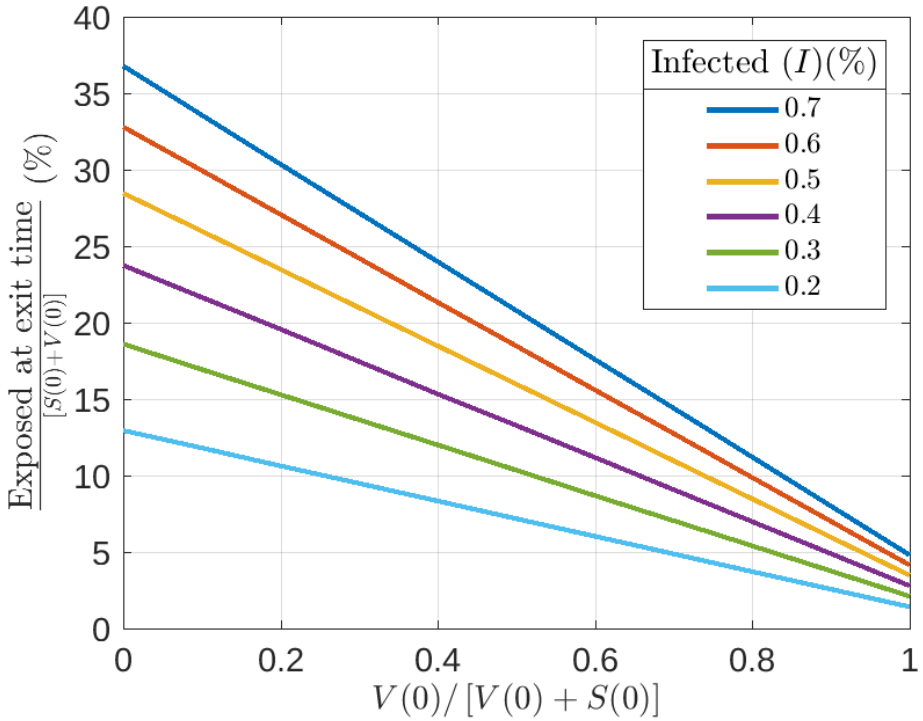


Figura: Proporción final de expuestos (cuando terminó la evacuación) con respecto a la población inicialmente sana para diferentes proporciones de individuos vacunados. Cada línea corresponde a diferentes fracciones de personas infectadas.

Proporción final de expuestos dependiendo de las tasas de contagio

- Se desarrolló un modelo de contagio montado sobre un modelo de evacuación.
- El modelo es configurable para tratar diversas enfermedades, no solamente COVID-19.
- El modelo permite explorar diferentes escenarios.
- Hay consistencia entre los experimentos numéricos y la evidencia empírica.

¡MUCHAS GRACIAS!

Referencias I

Agnelli, J. P., Colasuonno, F. & Knopoff, D. (2015). A kinetic theory approach to the dynamics of crowd evacuation from bounded domains. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, *25*(01), 109-129.

Aguiar, M., Dosi, G., Knopoff, D. A. & Virgillito, M. E. (2021). A multiscale network-based model of contagion dynamics: heterogeneity, spatial distancing and vaccination. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, *31*(12), 2425-2454.

Brauer, F., Castillo-Chavez, C. & Feng, Z. (2019). *Mathematical models in epidemiology* (Vol. 32). Springer.

Referencias II

Kim, D. & Quaini, A. (2020). Coupling kinetic theory approaches for pedestrian dynamics and disease contagion in a confined environment. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, *30*(10), 1893-1915.

LeVeque, R. J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems (Cambridge Texts in Applied Mathematics)*. Cambridge, Cambridge University Press.

Piccoli, B. & Tosin, A. (2011). Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *199*(3), 707-738.

Schäfer, M. (2006). *Computational engineering: Introduction to numerical methods*. Berlin, Springer.

Referencias III

Terna, P., Pescarmona, G., Acquadro, A., Pescarmona, P., Russo, G. & Terna, S. (2020). An agent-based model of the diffusion of Covid-19 using NetLogo. *URL https://terna.to.it/simul/SIsaR.html*.