SOBRE EL CALCULO FRACCIONARIO LOCAL. RETOS Y PERSPECTIVAS DE APLICACION

Dr. Juan E. Nápoles Valdés

GANoI, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Universidad Nacional del Nordeste

Ciclo de Seminarios. IMIT CONICET
9-10-2019 FaCENA, UNNE

Presentación

"Comportamiento cualitativo de las trayectorias de sistemas de tipo Liénard", aprobado por Resolución $1011/12$ CS UNNE bajo el código $12F011$, $2013-2014$.

"Estabilidad, acotamiento y propiedades cualitativas afines de sistemas de ecuaciones diferenciales bidimensionales", aprobado por Resolución $195/15$ CS UNNE bajo el código $F020-2014$, $2015-2018$.

"SOBRE EL COMPORTAMIENTO CUALITATIVO DE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS LOCALES", aprobado por Resolución $1100/18$ CS UNNE bajo el código $18F006$, $2019-2022$.

Líneas de Trabajo

1) Cálculo Fraccionario Local, después de algunas definiciones de derivadas “particulares”, hemos obtenido una definición de derivada generalizada (usada ya en varios trabajos), que tiene como casos particulares, prácticamente todas las derivadas locales definidas y la derivada ordinaria clásica de primer orden. Esta definición es susceptible de ser extendida a orden superior y generalizarla, lo mismo para el concepto de integral. Ya la hemos usado con colegas de otros países en diversos resultados. Por otra parte, con colegas de México y Cuba, hemos obtenido otra definición general de derivada local de cualquier orden, que también incluye la ordinaria y que hemos usado en diversas aplicaciones, al igual que la antes mencionada.

Líneas de Trabajo

2) Q-Calculus, hemos extendido la noción de la derivada clásica de Jackson, utilizando una función acotada en lugar de un número $0 < q < 1$ como aparece en los trabajos originales de éste.

3) Historia y Metodología de la Matemática, junto con estos temas hemos pensado en los orígenes de los conceptos involucrados y estamos tratando de escribir algunas reflexiones metodológicas sobre estos conceptos que manejamos.

Áreas Temáticas

a) Operadores diferenciales generalizados.
b) Cálculo Fraccionario n-dimensional.
c) Transformada de Laplace generalizada.
d) Propiedades cualitativas de ecuaciones diferenciales fraccionarias y generalizadas (estabilidad, acotamiento y oscilación, principalmente).
e) Desigualdades integrales de distintos tipos con varias nociones de convexidad.
d) Aplicaciones.

Preliminares

Definition

[Derivada Fraccionaria Caputo]
La Derivada Fraccionaria Caputo de orden α sobre el semieje real, de una función continua $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, es definida como

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, $$

con $n-1 < \alpha < n$, $n \in N$, $0 < a < t < \infty$.

Preliminares

Definition

[Derivada Fraccionaria Riemann-Liouville]
La Derivada Fraccionaria Riemann-Liouville de orden α sobre el semieje real, de una función continua $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, es definida como

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, $$

con $n-1 < \alpha < n$, $n \in N$, $0 < a < t < \infty$.

Insuficiencias

1) Casi todas las derivadas fraccionarias globales, excepto la Caputo y sus extensiones, satisfacen $D^{\alpha}(1)=0$, si α no es un número natural.
2) No es válida la derivada de un producto $D^{\alpha}(fg)=gD^{\alpha}(f)+fD^{\alpha}(g)$.
3) Obviamente, tampoco la derivada de un cociente $D^{\alpha}(\frac{f}{g})=\frac{gD^{\alpha}(f)-fD^{\alpha}(g)}{g^2}$ con $g\neq 0$.
4) No satisfacen la Regla de la Cadena, $D^{\alpha}(f\circ g)(t)=D^{\alpha}(f(g))D^{\alpha}g(t)$.
5) No existe un "calculus" formalizado.
6) No cumplen la propiedad de semigrupo $D^{\alpha}D^{\beta}(f)=D^{\alpha+\beta}(f)$.

Insuficiencias

7) Se sabe que en sistemas de ecuaciones diferenciales de orden entero, que satisfacen ciertas condiciones de existencia y unicidad, dos trayectorias diferentes no se cruzan entre en tiempo finito, sin embargo, en sistemas fraccionales (incluso en el caso de sistemas lineales) no se satisface esta propiedad.
8) Hay varios enfoques en el cálculo aproximado. Esto ha llevado a algunos errores al calcularlos: por un lado, suponemos que el orden de la derivada es entero hasta un paso determinado, al llegar a este paso, el orden de la derivada se convierte en un número real; por otro lado, en el proceso de derivación se considera que las potencias de las derivadas disminuyen en orden entero, lo que implica que hasta cierto orden es entero y desde aquí es un número real, en ambos casos hay inconsistencias con la función Gamma involucrada.

Resultados

Definition

Given a function $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Then the N-derivative of f of order α is defined by

$$N_F^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon F(t, \alpha)) - f(t)}{\varepsilon} \tag{1}$$

for all $t > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ being $F(\alpha, t)$ is some function. If f is $\alpha-$differentiable in some $(0, \alpha)$, and $\lim_{t \to 0^+} N_F^{(\alpha)} f(t)$ exists, then define $N_F^{(\alpha)} f(0) = \lim_{t \to 0^+} N_F^{(\alpha)} f(t)$, note that if f is differentiable, then $N_F^{(\alpha)} f(t) = F(t, \alpha) f'(t)$ where $f'(t)$ is the ordinary derivative.

Resultados

I) $F(t,\alpha) \equiv 1$, in this case we have the ordinary derivative.
II) $F(t,\alpha) = E_{1,1}(t^{-\alpha}) = e^{t^{-\alpha}}$. The non conformable derivative $N_1^{\alpha} f(t)$.
III) $F(t,\alpha) = E_{1,1}((1-\alpha)t) = e^{(\alpha-1)t}$, this kernel satisfies that $F(t,\alpha) \to 1$ as $\alpha \to 1$, a conformable derivative.
IV)$F(t,\alpha) = E_{1,1}(t^{1-\alpha})_1 = t^{1-\alpha}$ with this kernel we have $F(t,\alpha) \to 0$ as $\alpha \to 1$, a conformable derivative.
V)$F(t,\alpha) = E_{1,1}(t^{\alpha})_1 = t^{\alpha}$ with this kernel we have $F(t,\alpha) \to t$ as $\alpha \to 1$. It is clear that since it is a non-conformable derivative, the results will differ from those obtained previously.
VI) $F(t,\alpha) = E_{1,1}(t^{-\alpha})_1 = t^{-\alpha}$ with this kernel we have $F(t,\alpha) \to t^{-1}$ as $\alpha \to 1$ This is the derivative N_3^{α}. As in the previous case, the results obtained have not been reported in the literature.

Aplicaciones

1) Generalizaciones en el q-Calculus.
"A New Local Fractional Derivative of q-uniform Type",
Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity 8(1) (2019) 101-109.

Definition

Let f an arbitrary function. We define the N*-derivative* as

$$N_{a,b}^{q(n)} f(t) = \frac{f\left(\overline{J(q,n,a,b,k)}t\right) - f(t)}{t\left(\overline{J(q,n,a,b,k)} - 1\right)}$$

with $\overline{J(q,n,a,b,k)} = q^n E_{a,b}\widehat{(ht^{-\alpha})}_k$ and $E_{a,b}\widehat{(ht^{-\alpha})}_k$ is the k-nth term of $E_{a,b}(.)$ $a, b \in \mathbb{C}$ with $re(a), re(b) > 0$ with $E_{a,b}(.)$ the classic definition of Mittag-Leffler function. Also we consider $J(q,n,a,b,k) = q^n E_{a,b}(ht^{-\alpha})$ and $J(q,n,a,b,k)_t = q^n E_{a,b}(t)$.

Aplicaciones

$$N_2^q f(t) = \frac{f\left(te^{ht^{-\alpha}}\right) - f(t)}{t\left(e^{ht^{-\alpha}} - 1\right)}$$

Theorem

If a continuous real-valued function $V(x)$ exists such that:

1. $V(x(t))$ *is positive definite and*
2. $N_2^q(V(x(t))$ *is non-positive*

then $x(t) \equiv 0$ *is a stable solution of* $N_2^q x(t) = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0,$.

Aplicaciones

2) Caso global.
"A Note on Stability of Certain Lienard Fractional Equation", International Journal of Mathematics and Computer Science, 14(2019), no. 2, 301-315.

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = y(t) - F(x(t)), \quad {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}y(t) = -g(x(t)). $$

Theorem

Let $x(t)$ and $y(t)$ continuous and derivable functions. If f and g are continuous functions satisfying:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}$ *a Lipschitzian function,*

ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *and* $xg(x) > 0$ *for* $x \neq 0$,

then, the trivial solution of above system is stable.

Aplicaciones

3) Versión local.
"A NOTE ON THE OSCILLATORY CHARACTER OF SOME NON CONFORMABLE GENERALIZED LIENARD SYSTEM", Advanced Mathematical Models & Applications, Vol.4, No.2, 2019, pp.127-133

$$N_1^\alpha x = \frac{1}{h(x)}(A(y) - F(x)), \quad N_1^\alpha y = -h(x)g(x, N_1^\alpha x), \qquad (2)$$

under assumptions

i) $xg(x, N_1^\alpha x) > 0$, for all $x \neq 0$
ii) $0 < \alpha \leq h(x) \leq \beta$
iii) $A(y)$ is a continuous and strictly increasing in $\mathbb{R}$ with $A(0) = 0$ and $A(\pm\infty) = \pm\infty$.

$F_+(x) = \{maxF(x), 0\}$ and $F_-(x) = max\{-F(x), 0\}$.

Aplicaciones

Theorem

Suppose that i)-iii) are fulfilled and

1) *these exists a constant* $c > 0$ *and sequences* $\{x_n\}, \{x'_n\}$ *such that* $F(x_n) \geq -c, \quad x_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$, $F(x'_n) \leq c, \quad x'_n \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty$
2) *these exist sequences* $\{z_n\}, \{z'_n\}$ *such that* $F(z_n) \leq 0$ *with* $z_n > 0, \quad z_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, $F(z'_n) \geq 0$ *with* $z_n < 0, \quad z'_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

then, all solutions of (2) *oscillate iff*

$$\lim_{x \to \infty} \sup \left[F(x) +_{N_1} J_0^{\alpha} \frac{g(s, N_1 s)}{1 + F_-(s)}(x) \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \infty} \sup \left[-F(x) +_{N_1} J_0^{\alpha} \frac{g(s, N_1 s)}{1 + F_+(s)}(x) \right] = +\infty.$$

Aplicaciones

5) Desigualdades Integrales de tipo HH y HHF.
"New Hermite-Hadamard Type Inequalities Involving Non-Conformable Integral Operators", Symmetry 2019, 11, 1108; doi:10.3390/sym11091108

Theorem

Let $\alpha \in (0,1)$, $a < b$ *and* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a differentiable function. If* $f' \in L_{\alpha-1}[a,b]$ *and* $|f'|$ *is a convex function, then*

$$\left| \frac{1-\alpha}{(b-a)^{2-\alpha}} \left[{}_{N_3}J^{\alpha}_{b-}f(a) + {}_{N_3}J^{\alpha}_{a+}f(b) \right] - \frac{f(a)+f(b)}{b-a} \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{(1-\alpha)2^{\alpha-2}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{5}{24} \right) |f'(a)| + \left(\frac{(5-\alpha)2^{\alpha-2}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{1}{24} \right) |f'(b)| .$$

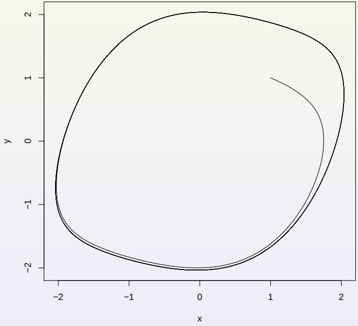
Aplicaciones Físicas

6) "On fractional Liénard-type systems", REVISTA MEXICANA DE FISICA 100 (1) 001-010 MAY 2019

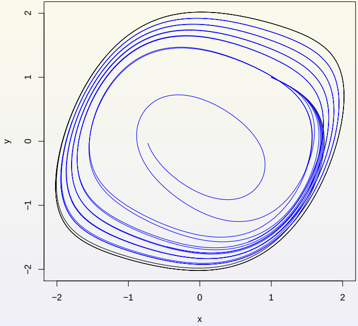
$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= y - F(x) \ , \\ y^{(\beta)} &= -g(x) \ , \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x' &= y - (\frac{x^3}{3} - x), \\ y' &= -x\left[1 + \frac{x^2(x^2-4)}{16}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

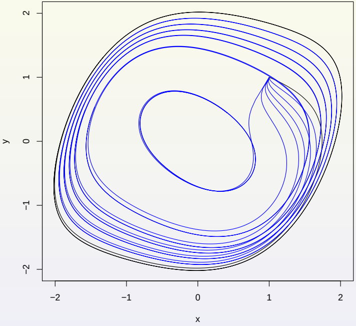
Aplicaciones Físicas



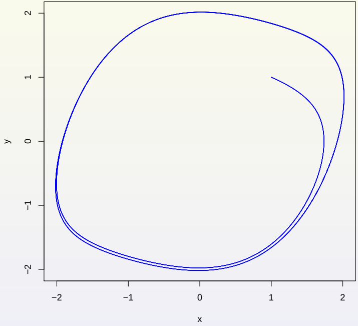
(a)



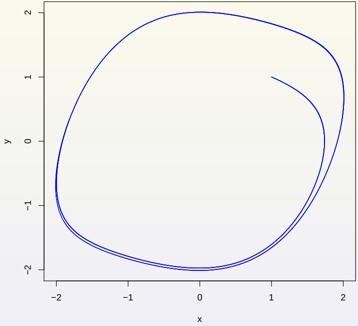
(b)



(c)



(d)



(e)

Aplicaciones Físicas

7) "Analysis of the local Drude model involving the generalized fractional derivative", Optik- International Journal for Light and Electron Optics 193 (2019) 163008

Definition

Given an interval I, $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ and a positive continuous function $T(t, \alpha)$ on I, the *derivative* $G_T^\alpha f$ of f of order α at the point $t \in I$ is

$$G_T^\alpha f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\lceil \alpha \rceil}} \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil} (-1)^k \binom{\lceil \alpha \rceil}{k} f\left(t - khT(t, \alpha)\right).$$

Aplicaciones Físicas

$$G_T^{\alpha} v(t) + \frac{1}{\tau} v(t) = -\frac{eE}{m_e}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

II) $F(t, \alpha) = E_{1,1}(t^{-\alpha}) = e^{t^{-\alpha}}$.
III) $F(t, \alpha) = E_{1,1}((1-\alpha)t) = e^{(1-\alpha)t}$.
IV)$F(t, \alpha) = E_{1,1}(t^{1-\alpha})_1 = t^{1-\alpha}$.
VI) $F(t, \alpha) = E_{1,1}(t^{-\alpha})_1 = t^{-\alpha}$.

Gracias