Caracterización de espacios Lipschitz via acotación de conmutadores de operadores fraccionarios y singulares sobre espacios de Lebesgue de exponente variable

PRADOLINI GLADIS G. - RAMOS WILFREDO ARIEL

FIQ (UNL); FACENA(UNNE)

Introducción

Dos operadores importantes

Introducción

Dos operadores importantes

- Operador Maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f|.$$

Introducción

Dos operadores importantes

- Operador Maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f|.$$

- Operador integral fraccionaria

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

con $0 < \alpha < n$.

[2]

Introducción

Se sabe que si $||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} < \infty$ ($f \in L^p(\mathbb{R}^n)$), entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(y)|^p dy\right)^{1/p} < C||f||_p,$$

si $1 < p < \infty$.

Introducción

Se sabe que si $||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{1/p} < \infty$ ($f \in L^p(\mathbb{R}^n)$), entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(y)|^p dy\right)^{1/p} < C||f||_p,$$

si $1 < p < \infty$.
Respecto de I_α, sabemos que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(y)|^q dy\right)^{1/q} < C||f||_p,$$

para el rango $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$.

Introducción

Para $p = n/\alpha$, esto es $q = \infty$, se sabe que

$$||I_\alpha f||_{BMO} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |I_\alpha f(y) - (I_\alpha f)_B| dy \leq C||f||_{n/\alpha}$$

Espacio Lipschitz $\mathbb{L}(\delta)$

Para $0 < \delta \leq 1$ el Espacio Lipschitz $\mathbb{L}(\delta)$ de parámetro δ se define como el de aquellas funciones b para las cuales existe una constante positiva C tal que

$$||b||_{\mathbb{L}(\delta)} = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{1+\delta/n}} \int_{Q} |b(x) - b_Q| dx < C,$$

donde $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo y $b_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q b$.

Espacio Lipschitz $\mathbb{L}(\delta)$

Para $0 < \delta \leq 1$ el Espacio Lipschitz $\mathbb{L}(\delta)$ de parámetro δ se define como el de aquellas funciones b para las cuales existe una constante positiva C tal que

$$||b||_{\mathbb{L}(\delta)} = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|^{1+\delta/n}} \int_{Q} |b(x) - b_Q| dx < C,$$

donde $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo y $b_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q b$.
Para el caso especial $\delta = 0$, el espacio $\mathbb{L}(0)$ coincide con el espacio de funciones de *oscilación media acotada*, *BMO*.

Resultados de caracterización

La charla es un resumen acotado del trabajo de Pradolini y Ramos en [2], en el que se muestran diferentes acotaciones de conmutadores que caracterizan una versión variable de espacios Lipschitz a los que pertenecen sus símbolos.

Espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$

Para una función medible $p : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ se definen

$$p^- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \qquad\qquad p^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

Espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$

Para una función medible $p : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ se definen

$$p^- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \qquad\qquad p^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

Diremos que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ para casi todo $\mathbb{R}^n$. Mientras que $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ denota la clase de funciones $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ para la que existe una constante positiva C que verifica

$$LH_0 : \qquad |p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e + 1/|x - y|)}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$LH_\infty : \qquad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

para alguna constante p_∞.

Espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$

El espacio de Lebesgue de exponente variable, $L^{p(\cdot)}$, se define como aquel de funciones medibles f definidas sobre $\mathbb{R}^n$ para las que existe una constante positiva λ tal que el *funcional modular convexo*

$$\rho(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx,$$

es finita.

Espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$

El espacio de Lebesgue de exponente variable, $L^{p(\cdot)}$, se define como aquel de funciones medibles f definidas sobre $\mathbb{R}^n$ para las que existe una constante positiva λ tal que el *funcional modular convexo*

$$\rho(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx,$$

es finita. En $L^{p(\cdot)}$ se definte la norma tipo Luxemburg

$$||f||_{p(\cdot)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ \rho(f/\lambda) \leq 1\}.$$

Espacio de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$

El espacio de Lebesgue de exponente variable, $L^{p(\cdot)}$, se define como aquel de funciones medibles f definidas sobre $\mathbb{R}^n$ para las que existe una constante positiva λ tal que el *funcional modular convexo*

$$\rho(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx,$$

es finita.

Se sabe que si $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ entonces el operado maximal de Hardy-Littlewood,

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|,$$

está acotada sobre $\mathbb{L}^{p(\cdot)}$.

Sobre los operadores de Calderón-Zygmund

Un operador de Calderón-Zygmund, T, se define como

$$Tf(x) = v.p. \int K(x-y)f(y)dy,$$

donde el núcleo $K \neq 0$ es homogéneo de grado n, esto es $K(x) = |x|^{-n}K(x/|x|)$, además $K \in C^{\infty}(S^{n-1})$ y $\int_{S^{n-1}} K = 0$.

De los conmutadores.

Dada una función localmente integrable b definida sobre $\mathbb{R}^n$ y un operador T, se define su conmutador C_b como

$$C_b f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x) = \int K(x-y)(b(x)-b(y))f(y)\,dy.$$

Un resultado de caracterización de $\mathbb{L}(\delta)$

Teorema

Sea $0 \leq \delta < 1$, $r(\cdot)$ *y* $q(\cdot)$ *dos exponentes tales que* $1/r(\cdot) - 1/q(\cdot) = \delta/n$, $r \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ *y* $r^+ < n/\delta$, *entonces*

$$C_b : L^{r(\cdot)} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}, \qquad \textit{si y sólo si}, \qquad b \in \mathbb{L}(\delta).$$

Dos Lemas para un resumen de la prueba.

Existen varios resultados de los espacios clásicos L^p que se generalizan a los $L^{p(\cdot)}$, uno de ellos es la *desigualdad de Hölder* , esta dice que si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$ entonces

$$\int |fg| \leq C||f||_{p(\cdot)}||g||_{p'(\cdot)}.$$

Dos Lemas para un resumen de la prueba.

Existen varios resultados de los espacios clásicos L^p que se generalizan a los $L^{p(\cdot)}$, uno de ellos es la *desigualdad de Hölder* , esta dice que si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$ entonces

$$\int |fg| \leq C||f||_{p(\cdot)}||g||_{p'(\cdot)}.$$

Lema

Si $b \in \mathbb{L}(\delta)$ y $1 < p < n/\delta$ y $1/q = 1/p - \delta/n$ resulta

$$||C_b f||_q \leq C||b||_{\mathbb{L}(\delta)}||f||_p.$$

Dos Lemas para un resumen de la prueba.

Existen varios resultados de los espacios clásicos L^p que se generalizan a los $L^{p(\cdot)}$, uno de ellos es la *desigualdad de Hölder* , esta dice que si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$ entonces

$$\int |fg| \leq C||f||_{p(\cdot)}||g||_{p'(\cdot)}.$$

Lema

Si $b \in \mathbb{L}(\delta)$ y $1 < p < n/\delta$ y $1/q = 1/p - \delta/n$ resulta

$$||C_b f||_q \leq C||b||_{\mathbb{L}(\delta)}||f||_p.$$

Lema

Si $0 < \delta < n$ y $r \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, con $r^+ < n/\delta$ y $q(\cdot)$ tal que $1/q(\cdot) - 1/r(\cdot) = \delta/n$, entonces,

$$||I_\delta f||_{q(\cdot)} \leq C||f||_{r(\cdot)}.$$

Resumen de la Prueba

- Para la ida suponemos que C_b lleva el $L^{r(\cdot)}$ a $L^{q(\cdot)}$.

Resumen de la Prueba

- Para la ida suponemos que C_b lleva el $L^{r(\cdot)}$ a $L^{q(\cdot)}$.
- Utilizamos las hipótesis de la regularidad del núcleo K, y en un entorno de un punto, reescribimos

$$\frac{1}{K(z)} = \sum_{k \geq 0} a_k e^{i\nu_k z}.$$

Resumen de la Prueba

- Para la ida suponemos que C_b lleva el $L^{r(\cdot)}$ a $L^{q(\cdot)}$.
- Utilizamos las hipótesis de la regularidad del núcleo K, y en un entorno de un punto, reescribimos

$$\frac{1}{K(z)} = \sum_{k\geq 0} a_k e^{i\nu_k z}.$$

- Utilizando la homogeneidad del núcleo, cuestiones gemométricas y algebráicas, podemos llegar a

$$\begin{aligned}\int_Q |b(x) - b'_Q| dx &= C \sum_{k\geq 1} a_k \iint (b(x) - b(y)) K(x-y) f_k(y) h_k(x) s(x) dy dx \\ &\leq C \sum_{k\geq 1} |a_k| \int |C_b f_k(x)| dx,\end{aligned}$$

con $f_k(y) = e^{-i\nu_k(\epsilon/l)y}\mathcal{X}_{Q'}(y)$, $h_k(x) = e^{i\nu_k(\epsilon/l)x}\mathcal{X}_Q(x)$ y $s(x) = sgn(b(x) - b_{Q'})$.

Resumen de la Prueba

- Por la desigualdad de Hölder y la hipótesis obtenemos

$$\int |C_b f_k(x)| dx \leq C ||C_b f_k||_{q(\cdot)} ||\mathcal{X}_Q||_{q'(\cdot)}.$$

Resumen de la Prueba

- Por la desigualdad de Hölder y la hipótesis obtenemos

$$\int |C_b f_k(x)| dx \leq C ||C_b f_k||_{q(\cdot)} ||\mathcal{X}_Q||_{q'(\cdot)}.$$

- Utilizando la relación $1/r(\cdot) - 1/q(\cdot) = \delta/n$, la desigualdad de Hölder y el primero de de los Lemas mencionados resulta

$$\int_Q |b(x) - b_{Q'}| dx \leq C(|z_1| + 1)^{n(1+\delta/n)} |Q|^{1+\delta/n},$$

par aun $z_1 \in \mathbb{R}^n$ fijo y tomando supremo sobre Q obtenemos que $b \in \mathbb{L}(\delta)$.

Resumen de la Prueba

- Para la vuelta suponemos que $b \in \mathbb{L}(\delta)$ y $f \in L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. El caso $\delta = 0$ fué probado en [1]. Cuentas análogas a la prueba de uno de los lemas antes mencionados, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$
\begin{aligned}
|C_b f(x)| &\leq \int |b(x) - b(y)||K(x-y)||f(y)|dy \\
&\leq C||b||_{\mathbb{L}(\delta)} \int |x-y|^{\delta}|x-y|^{-n}|f(y)|dy = C||b||_{\mathbb{L}(\delta)} I_{\delta}(|f|)(x).
\end{aligned}
$$

Resumen de la Prueba

- Para la vuelta suponemos que $b \in \mathbb{L}(\delta)$ y $f \in L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. El caso $\delta = 0$ fué probado en [1]. Cuentas análogas a la prueba de uno de los lemas antes mencionados, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} |C_b f(x)| &\leq \int |b(x) - b(y)||K(x-y)||f(y)|dy \\ &\leq C||b||_{\mathbb{L}(\delta)} \int |x-y|^{\delta}|x-y|^{-n}|f(y)|dy = C||b||_{\mathbb{L}(\delta)} I_{\delta}(|f|)(x). \end{aligned}$$

- Luego utilizando el Lema de acotación de la integral fraccionaria, $I_\delta : L^{r(\cdot)} \to L^{q(\cdot)}$, se culmina la prueba del primer Teorema.

Otros resultados de caracterización.

Si $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y β es tal que $1 < \beta \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \frac{n\beta}{(n-\beta)^+}$ y $\delta(\cdot)/n = 1/\beta - 1/p(\cdot)$, definimos el espacio $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$ como aquel de las funciones medibles f tales que

$$||f||_{\mathbb{L}(\delta(\cdot))} = \sup_B \frac{1}{|B|^{1/\beta}||\mathcal{X}_B||_{p'(\cdot)}} \int_B |f - f_B| < \infty.$$

Otros resultados de caracterización.

Si $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y β es tal que $1 < \beta \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \frac{n\beta}{(n-\beta)^+}$ y $\delta(\cdot)/n = 1/\beta - 1/p(\cdot)$, definimos el espacio $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$ como aquel de las funciones medibles f tales que

$$||f||_{\mathbb{L}(\delta(\cdot))} = \sup_B \frac{1}{|B|^{1/\beta}||\mathcal{X}_B||_{p'(\cdot)}} \int_B |f - f_B| < \infty.$$

En [3] obtienen condiciones sobre el exponente p para la acotación de la integral fraccionaria I^α de $L^{p(\cdot)}$ a $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$.

Otros resultados de caracterización.

Si $p \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y β es tal que $1 < \beta \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \frac{n\beta}{(n-\beta)^+}$ y $\delta(\cdot)/n = 1/\beta - 1/p(\cdot)$, definimos el espacio $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$ como aquel de las funciones medibles f tales que

$$||f||_{\mathbb{L}(\delta(\cdot))} = \sup_B \frac{1}{|B|^{1/\beta}||\mathcal{X}_B||_{p'(\cdot)}} \int_B |f - f_B| < \infty.$$

En [3] obtienen condiciones sobre el exponente p para la acotación de la integral fraccionaria I^α de $L^{p(\cdot)}$ a $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$. Nosotros obtenemos un resultado de caracterización de $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$ en términos de la acotación de C_b, mas específicamente

Teorema

Sea $0 \leq \delta(\cdot) \leq 1$, $p, r \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ con $p(x) \geq p_\infty$ ctp y $1 < \beta \leq p^-$ tal que $1/r(x) - 1/q(x) = \delta(x)/n = 1/\beta - 1/p(x)$ con $\sup_x r(x)\delta(x) < n$, entonces $C_b : L^{r(\cdot)} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$ si y sólo si $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$ y $||C_b f||_{q(\cdot)} < \infty$ para $f \in L^{r(\cdot)}$

Sobre acotaciones desde los espacios de Lebesgue a los Lipschitz

El siguiente muestra condiciones suficientes sobre el símbolo de C_b para que resulte acotado entre espacios de Lebesgue y Lipschitz

Sobre acotaciones desde los espacios de Lebesgue a los Lipschitz

El siguiente muestra condiciones suficientes sobre el símbolo de C_b para que resulte acotado entre espacios de Lebesgue y Lipschitz

Teorema

Sean p, q y r en $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$ y $1 < \beta < p^-$ con $p_\infty \leq p(\cdot)$, $q^+ < r^-$, $0 < \delta(\cdot) = n/\beta - n/p(\cdot) \leq 1$, $0 \leq \tilde{\delta}(\cdot) = n/\beta - n/q(\cdot) \leq 1$ tal que $\tilde{\delta}(\cdot)/n = \delta(\cdot)/n - 1/r(\cdot)$ y $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$. Si existe η tal que $\tilde{\delta}^+ < \eta \leq 1$ y el núcleo K del operador T satisface

$$|K(x-y) - K(x'-y)| + |K(y-x) - K(y-x')| \leq C\frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n+\eta}},$$

si $|x-y| \geq 2|x-x'|$, entonces $C_b : L^{r(\cdot)} \hookrightarrow \mathbb{L}(\tilde{\delta}(\cdot))$.

Operadores del tipo fraccionario T^α para $0 < \alpha < n$

Trabajamos ahora con operadores del estilo

$$T^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^\alpha(x-y) f(y) dy$$

Operadores del tipo fraccionario T^α para $0 < \alpha < n$

Trabajamos ahora con operadores del estilo

$$T^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^\alpha(x-y) f(y) dy$$

Con K^α homogéneo de grado $-(n-\alpha)$, esto es

$$|K^\alpha(x-y)| = C|x-y|^{-(n-\alpha)} K^\alpha\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)$$

Condición de Regularidad de K^α

Pediremos también la siguiente condición de regularidad sobre el núcleo K^α

$$|K^\alpha(x-y) - K^\alpha(x'-y)| + |K^\alpha(y-x) - K^\alpha(y-x')| \leq C\frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n-\alpha+\eta}},$$

si $|x-y| \geq 2|x-x'|$ y $0 < \eta \leq 1$.

$T^\alpha : L^{p(\cdot)} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$

Bajo estas condiciones es fácil ver que $|T^\alpha f(x)| \leq C I_\alpha(|f|)(x)$, donde I_α es la integral fraccionaria

$$I_\alpha f(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

por lo que obtenemos que $T^\alpha : L^{p(\cdot)} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$ siempre que $1/p(\cdot) - 1/q(\cdot) = \alpha/n$.

El conmutador de T^α

Denotamos con C_b^α al conmutador del operador T^α definido como

$$C_b^\alpha f(x) = b(x)T^\alpha f(x) - T^\alpha(bf)(x)$$

El conmutador de T^α

Denotamos con C_b^α al conmutador del operador T^α definido como

$$C_b^\alpha f(x) = b(x)T^\alpha f(x) - T^\alpha(bf)(x)$$

Otro resultado de caracterización de $\mathbb{L}(\delta(\cdot))$ es el siguiente

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, p, q y r en $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, con $p(\cdot) \geq p_\infty$ y sea $1 < \beta \leq p^-$ tal que $0 \leq 1/\beta - 1/p(\cdot) = \delta(\cdot)/n = 1/r(\cdot) - \alpha/n - 1/q(\cdot) < 1$. Sea $\eta_0 \leq \eta \leq 1$, entonces

$$C_b^\alpha : L^{r(\cdot)} \hookrightarrow L^{q(\cdot)} \text{ sii } b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot)) \text{ y } ||C_b^\alpha f||_{q(\cdot)} < \infty.$$

Otros resultados

Un tipo de acotación diferente de C_b^α también nos provee de una condición necesaria para estar en el espacio lipschitz.

Otros resultados

Un tipo de acotación diferente de C_b^α también nos provee de una condición necesaria para estar en el espacio lipschitz.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, p *y* r *en* $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^n)$, *con* $p_\infty \leq p(x)$, $r_\infty \leq r(x) \leq r^+ < n/\alpha$, *y sea* $1 < \beta < p^-$. *Sea* $0 < \delta(\cdot)/n = 1/\beta + 1/p(\cdot) \leq 1$ *y* $0 \leq \tilde{\delta}(\cdot) = \alpha + \delta(\cdot) - n/r(\cdot) \leq 1$. *Supongamos que existe* η *tal que* $\max\{\eta_0,\ \alpha + 1 - n/r^-\} < \eta \leq 1$. *Si* $b \in \mathbb{L}(\delta(\cdot))$, *entonces* $C_b^\alpha : L^{r(\cdot)} \hookrightarrow \mathbb{L}(\tilde{\delta}(\cdot))$.

Una acotación del conmutador de I_α

Para el caso particular de que $\tilde{\delta}^- = 0$ el Teorema anterior resulta ser una versión generalizada al contexto variable de un resultado conocido para el conmutador $I_{\alpha,b}$ de la integral fraccionaria.

Corolario

Si $T^\alpha = I_\alpha$ denota el operador integral fraccionaria para $0 < \alpha < n$, bajo las mismas hipótesis que el Teorema anterior obtenemos que

$$I_{\alpha,b} : L^{r(\cdot)} \hookrightarrow \mathbb{L}(\alpha + \delta(\cdot) - n/r(\cdot)),$$

donde $I_{\alpha,b}$ denota al conmutador de I_α.

Bibliografía

A. Bernardis, E. Dalmasso, and G. Pradolini.
Generalized maximal functions and related operators on weighted Musielak-Orlicz spaces.
Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 39(1):23–50, 2014.

G. G. Pradolini and W. A. Ramos.
Characterization of Lipschitz functions via the commutators of singular and fractional integral operators in variable Lebesgue spaces.
Potential Anal., 46(3):499–525, 2017.

M. Ramseyer, O. Salinas, and B. Viviani.
Lipschitz type smoothness of the fractional integral on variable exponent spaces.
Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 403(2):95–106, 2013.