



Determinación de g mediante un plano inclinado

Entre los conceptos empleados en física uno de gran relevancia es el de conservación de una cantidad. Esto se debe a que sin importar como sean los detalles de la evolución de un sistema siempre podremos llevar una *contabilidad* que verifique la existencia de un valor constante entre dos o más instantes cualesquiera de esa evolución.

En el caso que se muestra en la Figura 1, el sistema es un anillo que baja sin deslizar por un plano inclinado en un ángulo α respecto a la horizontal. Como el plano se mantiene en la misma posición todo el tiempo, la energía mecánica E_{mec} del sistema es la suma de la energía debida al movimiento E_k , la energía debida a la rotación E_r y la energía debida a la fuerza de gravedad E_g que tiene el anillo en cada instante. Suponiendo que no hay deslizamiento y ninguna otra posibilidad que permita disipar la energía mecánica del sistema, se tiene que

$$E_{\text{mec}} = E_g + E_k + E_r = E_1 = E_2 \quad (1)$$

se conserva y si podemos conocerla en un punto dado como ser el punto 1 indicado en la Figura 1, sabremos que $E_{\text{mec}} = E_1$ y en el

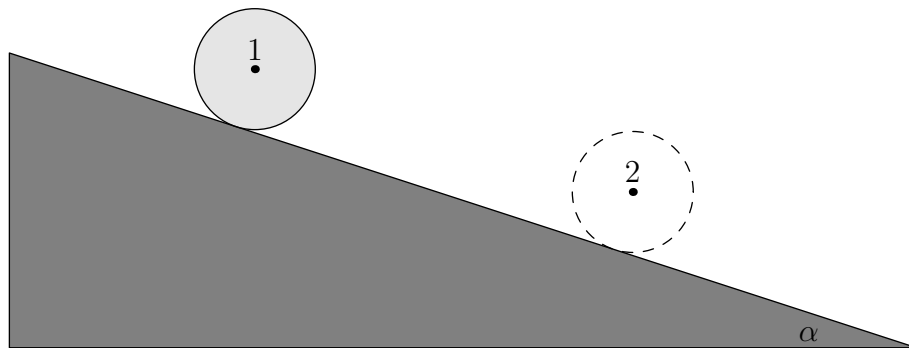


Figura 1: Anillo que rueda sin deslizar por la superficie de un plano inclinado en un ángulo α respecto a la horizontal. Se indican dos posiciones posibles 1 y 2 en su trayectoria.

punto 2 deberá valer lo mismo $E_{\text{mec}} = E_2$.

Recordemos que $E_k = mv^2/2$ con m la masa y v la velocidad del anillo al desplazarse por la superficie del plano inclinado. $E_r = I\omega^2/2$ con $I = ma^2$ el momento de inercia respecto al eje de giro del anillo de radio a y ω la velocidad angular de rotación respecto al mismo



eje. $E_g = mgh$, con g la aceleración de la gravedad y h es la altura del anillo medida en dirección vertical desde la base del plano hasta el centro del mismo.

Ecuaciones y Experimentos con Análisis

Según mencionamos, el planteo de la conservación de la energía mecánica nos permite escribir para el punto 1

$$E_1 = mgh_1 \quad (2)$$

con subíndices 1 y 2 indicaremos los valores de las variables involucradas en las posiciones 1 y 2 respectivamente. Notar que si desde 1 el anillo parte del reposo, se tiene $E_{r,1} = 0$ y $E_{k,1} = 0$. Por tanto, la energía mecánica en el punto 2, es

$$E_2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2. \quad (3)$$

Igualando Ecs. (2) y (3), utilizando la definición de I y que el anillo gira sin deslizar, $v = \omega a$, se obtiene

$$gh_{12} = v_2^2, \quad (4)$$

donde hemos definido $h_{12} \equiv h_1 - h_2$. Si definimos también $t_{21} \equiv t_2 - t_1$ el tiempo que tarda en llegar el anillo desde 1 a 2, la velocidad $v_2 = at_{21}$. Es decir, el movimiento sobre la superficie del plano es acelerado uniformemente con aceleración a . Esta dependencia en a se puede salvar utilizando el resultado $s_{21} = at_{21}^2/2$ con s_{21} la distancia recorrida sobre el plano en el tiempo t_{21} . Por lo tanto, se tiene que $v_2 = 2s_{21}/t_{21}$ que reemplazamos en Ec. (4) para obtener

$$h_{12} = \frac{g}{4} \sin^2(\alpha)t_{21}^2, \quad (5)$$

donde hemos utilizado $\sin(\alpha) = h_{12}/s_{21}$.

Finalmente, al igual que se ha propuesto en otros experimentos para la determinación de g se busca una relación lineal entre magnitudes medibles para diferentes posiciones relativas 1 y 2. Es decir, se realiza un experimento que permita medir t_{21} para cada h_{12} y de

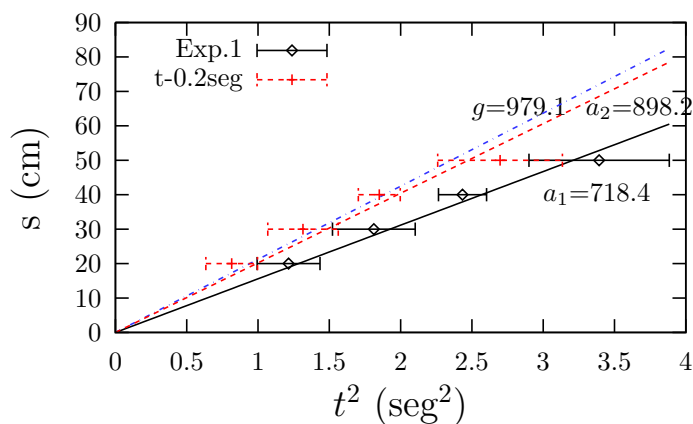


Figura 2: Distancia s sobre el plano vs t^2 . Se indican para $s=20, 30, 40$ y 50 cm los tiempos promedios cuadrados sobre 15 mediciones junto con los errores promedios. Se muestran también los mismos resultados con una disminución de 0.2 seg. para cada intervalo de tiempo. Se indican las rectas que representan los mejores ajustes y las respectivas aceleraciones a_1 y a_2 .

una regresión lineal entre t_{21}^2 y h_{12} se obtiene de la Ec. (5) el valor de g .

En la Figura 2 se muestran los desplazamiento sobre el plano versus t^2 considerando entonces $h_{21} = \sin(\alpha)s_{21}$ en la Ec. (5) por lo que hemos utilizado

$$s_{12} = \frac{g}{4} \sin(\alpha)t_{21}^2, \quad (6)$$

siendo más fácil de medir que h_{12} . Los tiempos en estas mediciones fueron tomados con un cronómetro de mano. Notar que el valor obtenido para la gravedad $a_1 = 718,4\text{cm/seg}^2$ queda un 36% por debajo del valor esperado $g = 979,1\text{cm/seg}^2$. Podemos interpretar que *le toma más tiempo* en bajar al anillo del que debería o bien hay una demora extra en los intervalos de tiempo para cada desplazamiento. En la misma Figura 2 también se muestran los datos distancia s vs. t^2 descontando 0.2 seg a cada intervalo de tiempo con el fin de explorar una posible corrección de la demora al accionar el cronómetro.

De lo anterior se concluye que es necesario mejorar las mediciones de tiempos por lo que se emplearon compuertas equipadas con fotodetectores que permiten medir intervalos temporales con una precisión de décimas de mseg (± 0.0001 seg). En la Figura 3 se



Figura 3: Empleo de compuertas de tiempo con fotodetectores para determinar distancia s sobre el plano vs t

muestra una foto en la que se puede ver la utilización de las compuertas con la configuración experimental ensayada. En la Figura 4 se muestran los datos obtenidos y los ajustes encontrados para los dos conjuntos de datos. El caso anterior mostrado en la Figura 2 'Exp.1' con aceleración de la gravedad $a_1 = 718,4\text{cm}/\text{seg}^2$ y el caso de mayor precisión en la determinación de tiempos 'Exp.2' con aceleración de la gravedad $a_2 = 1146,61\text{cm}/\text{seg}^2$. La modificación en la metodología de medición de los intervalos de tiempos corrige sustancialmente la determinación de los mismos. Sin embargo, la regresión lineal sobre los datos obtenidos determinan ahora una aceleración 17 % por arriba del valor esperado. Para evaluar al error estimado de esta medición y de todas las que mencionamos en este trabajo empleamos el error de la regresión lineal reportado al aplicar el método de cuadrados mínimos Marquardt-Levenberg implementado con un algoritmo de software libre (gnuplot) y que en este caso resulta $a_2 = 1146,61 \pm 90\text{cm}/\text{seg}^2$.

Se quiere explorar una posible mejora de la metodología. Se emplea una nueva configuración experimental con un plano de mayor longitud que permite introducir mayor cantidad de datos. En la Figura 5 se muestran los tiempos cuadrados t^2 obtenidos para $s=10, 20, 30, 40, 50$ y 60 cm. De la regresión lineal y su error se obtiene una aceleración $a_3 = 1089,84 \pm 22\text{cm}/\text{seg}^2$. Se obtiene un error relativo del 2 % que es mas acotado. Sin embargo, el valor de la aceleración es significativamente un 11 % superior al esperado.

Observando el anillo que utilizamos para realizar el experimento

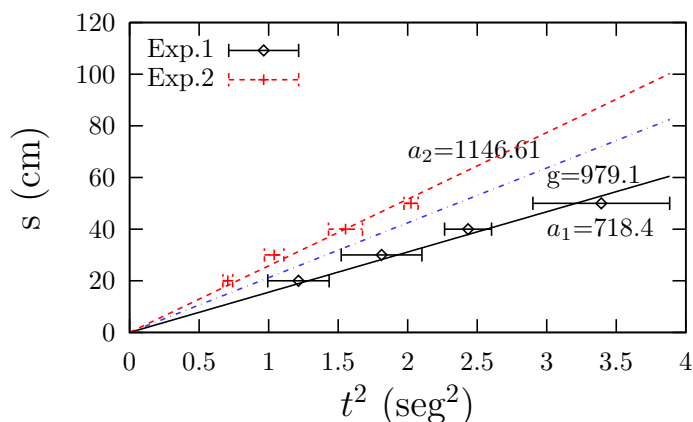


Figura 4: Distancia s sobre el plano vs t^2 . Se indican para $s=20, 30, 40$ y 50 cm los tiempos promedios cuadrados sobre 15 mediciones junto con los errores promedios. Se muestran los resultados del 'Exp.1' Figura2 y los obtenidos con las compuertas de fotodetectores 'Exp.2' junto con los mejores ajustes de la regresion lineal y las respectivas aceleraciones a_1 y a_2 .

notamos que este tiene un espesor de aproximadamente la tercera parte de su radio a , por lo tanto su momento de inercia debe diferir de $I = ma^2$. Para una rueda con espesor determinado por el radio interno R_1 y el radio externo R_2 , el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2), \quad (7)$$

verificándose que si $R_1 = R_2 = a$ se recupera el valor que consideramos arriba. Suponiendo entonces que $R_2 = a$ y $R_1 = 2a/3$ se obtiene un momento de inercia corregido de $I = \frac{13}{18}ma^2$. Esto implicaría que el gasto de energía en la rotación es menor al que hemos supuesto y el anillo dispondría de mayor energía cinética que al no ser contabilizada se compensa en el modelo con una mayor aceleración. Veamos brevemente como introducir un factor de corrección que llamamos $f = f(x)$ donde x representa la fracción del radio a que define el radio interior R_1 , es decir $R_1 = xa$. Reemplazando este R_1 y $R_2 = a$ en la Ec.(7) podemos cambiar el momento de inercia empleado en la Ec.(3) por $I = ma^2(1 + x^2)/2$ y reescribir la Ec.(4)

$$gh_{12} = f(x)v_2^2, \quad (8)$$

con $f(x) = (3 + x^2)/4$. Notar que para $f(x = 1) = 1$ se reobtienen

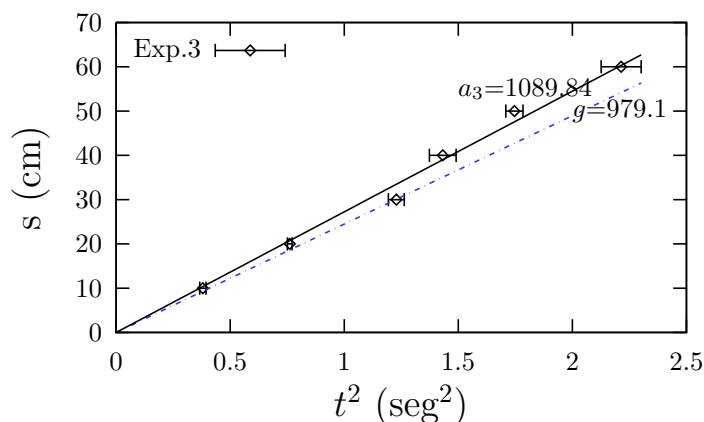


Figura 5: Distancia s sobre el plano vs t^2 . Se indican para $s=10, 20, 30, 40, 50$ y 60 cm los tiempos promedios cuadrados sobre 12 mediciones junto con los errores promedios. se indican la recta de referencia correspondiente a la aceleración g y la obtenida por regresión lineal a_3 .

las formulas que hemos utilizado deducidas desde Ec.(4) en adelante y correspondiendo entonces a $R_1 = a = R_2$.

El efecto de considerar en lugar de un anillo una rueda con grosor definido por $R_1 = 2a/3$ se obtiene de $f(x = 2/3) = 31/36$ cuyo inverso $\approx 1,16$ multiplicado en el lado derecho de la Ec. (6) se traduce en una aceleración de la gravedad 16 % menor a la obtenida en a_2 o a_3 y por tanto en el rango del valor esperado g .

Podríamos concluir entonces que una consideración no adecuada de la forma del objeto empleado y por tanto de su momento de inercia es la razón por la cual sistemáticamente obtenemos una aceleración de la gravedad mayor a la esperada. Para poner a prueba esta explicación se reemplaza el anillo grueso por una pieza cilíndrica maciza y se la utiliza en la determinación s versus t^2 empleando la misma configuración experimental de la Figura 5. En la Figura 6 se muestran para $s=20, 30, 40, 50$ y 60 cm los tiempos promedios al cuadrado y las barras de errores correspondientes. En este caso $f(x = 0) = 3/4$ puesto que $I = ma^2/2$ y la aceleración predicha es $a_4 = 1153,2 \pm 20\text{cm}/\text{seg}^2$ que corresponde a la pendiente de la recta obtenida por regresión lineal como mejor ajuste a los datos experimentales.

Este resultado no contradice nuestra última propuesta sobre la revisión del momento de inercia, pero sí sugiere la existencia de otros

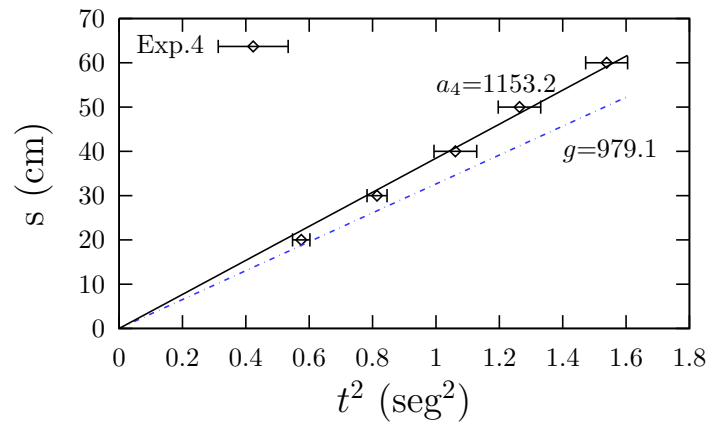


Figura 6: Distancia s sobre el plano vs t^2 . Se indican para $s=20, 30, 40, 50$ y 60 cm los tiempos promedios al cuadrado sobre 12 mediciones junto con los errores promedios. se indican la recta de referencia correspondiente a la aceleración g y la obtenida por regresión lineal a_4 .

errores sistemáticos aún no develados. Por cuestiones prácticas hemos considerado los promedios de los tiempos de caída respectivos a distancias fijas en múltiplos de 10 cm. Sin embargo, es de esperar que en cada realización del experimento exista una incerteza en la posición desde el punto de partida que hasta ahora ha sido despreciada. Se sugiere repetir para los dos objetos rueda y disco entre 50 y 100 realizaciones en las que se tomen distancias arbitrarias entre 10 y 100 cm y se determine la distancia s y tiempos t de caída en cada una. Respecto a la elección de otros objetos, el de una esfera puede ser conveniente. Su momento de inercia es $I = 2MR^2/5$ con M masa y R radio de la misma. Tiene la ventaja sobre la rueda y el disco, de tener un único momento de inercia que al ser el mismo sobre cualquier eje de giro decae solamente en dirección vertical.



Cuestionario

1. Si se compara con el método de caída libre ¿Cuál podría ser la ventaja de emplear el plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal?
2. ¿Que valor de α deberíamos tomar para que la determinación del intervalo de tiempo sea el doble del que corresponde al de caída libre?
3. Si $\alpha = 30^\circ$ ¿Desde que altura se debería dejar caer el anillo para que t_{12} sea aproximadamente 1 seg? ¿Y si $\alpha = 18,44^\circ$?
4. Evidentemente el resultado que hemos obtenido no depende de la masa del anillo, ni de su radio ¿Podemos utilizar este hecho para disminuir posibles fuentes de errores?
5. ¿Cuales serían las posibles fuentes de errores?
6. Considerando que el deslizamiento es una posible fuente de error ¿ Que se puede hacer para verificar y cuantificar el desplazamiento?
7. ¿Podríamos utilizar otro objeto que gire sin deslizar? ¿Qué correcciones hay que hacer si utilizamos un disco?
8. ¿Y si quisiéramos utilizar un objeto que sí desliza?